



# Propagation des ondes large bande dans des milieux élastiques 3D : méthodes d'éléments de frontière en temps et couplage avec les différences finies

François Janod

## ► To cite this version:

François Janod. Propagation des ondes large bande dans des milieux élastiques 3D : méthodes d'éléments de frontière en temps et couplage avec les différences finies. Géophysique [physics.geoph]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1999. Français. NNT : . tel-00749683

**HAL Id: tel-00749683**

**<https://theses.hal.science/tel-00749683>**

Submitted on 8 Nov 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**OBSERVATOIRE DE GRENOBLE**  
et  
**LABORATOIRE DE GÉOPHYSIQUE INTERNE ET TECTONOPHYSIQUE**

**Mémoire de THÈSE**

présenté par

**François JANOD**

pour obtenir le titre de DOCTEUR de

**L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER - GRENOBLE I**

Spécialité: Géophysique - Géochimie - Géomécanique

**Propagation des ondes large bande dans des milieux élastiques 3D:  
Méthodes d'Eléments de Frontière en temps et couplage avec les  
Différences Finies.**

Date de soutenance: 16 décembre 1999

Composition du jury:

M D. Rodrigues	Rapporteur	Ingénieur de Recherche, CEA/LDG
M J. Virieux	Rapporteur	Professeur, Sophia-Antipolis
M O. Coutant	Directeur de thèse	Physicien adjoint, Observatoire de Grenoble
M M. Bouchon	Examineur	Directeur de recherche, CNRS, Grenoble
M J. Neuberg	Examineur	Lecturer, Université de Leeds



Thèse de Doctorat de l'Université  
Joseph Fourier - Grenoble I

*Titre de l'ouvrage:*

**Propagation des ondes large bande dans des milieux élastiques 3D: Méthodes d'Eléments de Frontière et couplage avec les Différences Finies.**

*Auteur:*

**François JANOD**

*Etablissement:*

**Observatoire de Grenoble  
Laboratoire de Géophysique Interne  
et Tectonophysique**

*Résumé:* Ce travail de thèse a porté sur le développement de méthodes numériques permettant de simuler la propagation des ondes sismiques "large bande" dans des milieux à géométries tridimensionnelles simples: un nombre réduit de discontinuités, surmontés d'une topographie 3D. Le champ incident modélisé doit pouvoir émaner d'une source ponctuelle proche de la surface.

Dans l'introduction générale nous précisons les objectifs de cette étude, et passons en revue les méthodes numériques utilisées en sciences de la terre.

Une méthode d'éléments de frontière reposant sur une représentation intégrale directe formulée en temps a été développée. Elle utilise un schéma de résolution explicite, qui permet de s'affranchir des limitations rencontrées en 3D par la formulation en fréquence et donne des résultats d'une précision très satisfaisante. Les limitations de la méthode viennent de la possible amplification du bruit numérique, mais surtout d'un temps de calcul important, qui limite en pratique la taille des modélisations réalisables. Les deux premiers chapitres exposent la méthode et ses résultats.

Des expressions analytiques des fonctions de Green des milieux élastiques à gradient de vitesse constant ont été proposées de façon heuristiques par Sanchez-Sesma et al. (1999). Dans le chapitre 3, nous avons testé ces fonctions pour le cas 3D, et cherché à déterminer leur applicabilité aux méthodes intégrales.

Pour échapper aux limitations sur la taille des modèles imposées par les méthodes d'éléments de frontière, tout en utilisant leur capacité à résoudre avec précision les conditions de surface libre, nous avons démarré l'étude d'une méthode hybride combinant éléments de frontière et différences finies en fréquence. Le dernier chapitre propose essentiellement une étude de l'optimisation d'un schéma de différences finies d'ordre 2, et montre les premiers résultats de sa mise en oeuvre.

*Mots Clés:* Eléments de Frontière, fonctions de Green, Différences Finies, effets de topographie, propagation d'ondes

OBSERVATOIRE DE GRENOBLE  
et  
LABORATOIRE DE GÉOPHYSIQUE INTERNE ET TECTONOPHYSIQUE

## Mémoire de THÈSE

présenté par

**François JANOD**

pour obtenir le titre de DOCTEUR de

**L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER - GRENOBLE I**

Spécialité: Géophysique - Géochimie - Géomécanique

**Propagation des ondes large bande dans des milieux élastiques 3D:  
Méthodes d'Eléments de Frontière en temps et couplage avec les  
Différences Finies.**

Date de soutenance: 16 décembre 1999

Composition du jury:

M D. Rodrigues	Rapporteur	Ingénieur de Recherche, CEA/LDG
M J. Virieux	Rapporteur	Professeur, Sophia-Antipolis
M O. Coutant	Directeur de thèse	Physicien adjoint, Observatoire de Grenoble
M M. Bouchon	Examineur	Directeur de recherche, CNRS, Grenoble
M J. Neuberg	Examineur	Lecturer, Université de Leeds





# Remerciements

*Durant ces quatre années passées au Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonique, Olivier Coutant a d'abord encadré un travail de DEA, puis cette thèse. Je le remercie d'avoir eu la patience et l'énergie nécessaire, et de m'avoir ainsi permis de venir à bout de ce travail.*

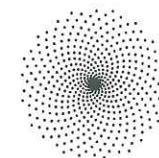
*Je suis reconnaissant à Jean Virieux et Dominique Rodrigues d'avoir accepté de lire une première épreuve de ce manuscrit et d'en être les rapporteurs. Je remercie également Michel Bouchon et Jürgen Neuberg, qui ont participé au jury de thèse.*

*Merci à toutes les personnes du laboratoire qui, à un moment ou à un autre, ont pu répondre à une question, résoudre une difficulté (notamment informatique), ou simplement partager leur bonne humeur.*

*Je remercie particulièrement David et Franz, avec qui j'ai partagé non seulement un bureau, mais aussi les joies de la rédaction... et de nombreuses discussions, pas toujours scientifiques.*

*J'ai eu la chance d'effectuer une campagne sismologique aux Célèbes, en compagnie de Robert Guiguet, et j'ai pu apprécier son efficacité et son enthousiasme indéfectible.*

*Et puis je me souviendrai avec plaisir de tous les bons moments passés entre thésards: des soirées tarots arbitrées de façon impartiale par Christophe, des virées multi-sports avec Pascal, des envolées lyriques de David, du Patxaran de Marie-Pierre, d'un certain barbecue "sur-volté", de l'éphémère mais néanmoins performant team ski de fond du LGIT (bravo Christian et JR), et des nombreux autres moments de convivialité qui ont marqué ces années.*



## Résumé

Ce travail de thèse a porté sur le développement de méthodes numériques permettant de simuler la propagation des ondes sismiques "large bande" dans des milieux à géométries tridimensionnelles simples. Au départ, l'objectif était de modéliser des objets géologiques caractérisés par un nombre réduit de discontinuités, et surmontés d'une topographie 3D: par exemple un modèle simplifié des Alpes (la topographie et le Moho) ou un volcan. Dans une telle modélisation, le champ incident, diffracté par la topographie, doit pouvoir aussi bien être une onde de surface qu'une onde plane, ou émaner d'une source ponctuelle superficielle.

Dans une introduction générale nous précisons les objectifs de cette étude, et nous passons en revue les différentes méthodes numériques utilisées en sciences de la terre.

Une méthode d'éléments de frontière reposant sur une représentation intégrale directe formulée en temps a été développée. Elle utilise un schéma de résolution explicite, permettant de s'affranchir des limitations rencontrées en 3D par la formulation en fréquence. Nous obtenons des résultats d'une précision très satisfaisante. Les limitations de la méthode viennent de la possible amplification du bruit numérique au long des itérations, mais surtout d'un temps de calcul important, qui limite en pratique la taille des modélisations réalisables. La méthode et les résultats obtenus sont exposés dans les deux premiers chapitres de ce mémoire, le deuxième étant constitué d'un article accepté par *Geophysical Journal International*.

Pour permettre la prise en compte de milieux faiblement hétérogènes par les méthodes intégrales, il serait intéressant de connaître les fonctions de Green de tels milieux. Des expressions analytiques des fonctions de Green des milieux élastiques à gradient de vitesse constant ont été proposées de façon heuristique par Sánchez-Sesma et al. (1999). Dans le chapitre 3, nous avons testé ces fonctions pour le cas 3D, et cherché à déterminer leur applicabilité.

Finalement, dans le but d'échapper aux limitations imposées par les méthodes d'élé-



ments de frontière (principalement sur la taille des modèles simulables), tout en utilisant leur capacité à résoudre avec précision les conditions de surface libre, nous avons démarré l'étude d'une méthode hybride combinant les éléments de frontière avec une méthode de différences finies en fréquence. Le dernier chapitre propose essentiellement une étude de l'optimisation d'un schéma de différences finies d'ordre 2, et montre les premiers résultats de sa mise en oeuvre.

## Abstract

This work was aimed at developing numerical methods for the simulation of broad band seismic waves in geometrically simple three-dimensional media. Our goal was to model geological objects with a few discontinuities, topped by a 3D topography: for example a simplified model of the Alps (topography and Moho) or a volcano. The incident field is not supposed to have any particular pattern, and can be due to a point source located near the surface.

In a general introduction, we present the goals of this study, and make a brief review of the numerical methods used in earth sciences.

In a first part, we developed a Boundary Element Method based upon a direct integral representation formulated in the time domain. The use of an explicit solution scheme to overcome the limitations encountered when using the frequency formulation in 3D. We obtain very accurate results. The main limitations of the method are the possible occurrence of noise amplification, and the important computer resources required, which restrict the size of the models we can compute. The method and results are stated in the two first chapters, the second one constituting a paper accepted by *Geophysical Journal International*.

In order to be able to handle weakly heterogeneous media with integral methods, we need to know the corresponding Green's functions. Analytical expressions for Green's functions in constant velocity gradient media are proposed heuristically by Sánchez-Sesma et al. (1999). In chapter three, we tested these functions and tried to determine their range of applicability.

Finally, as we want to simulate large models, but are also interested in using the ability of boundary element methods to handle accurately the free surface, we started the study of a hybrid method combining them with a finite difference method, in the frequency domain. The last chapter's purpose is mainly the determination of an optimal second order finite difference scheme, and the first results of its implementation.

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>13</b>
<b>1 Équations intégrales et éléments de frontière</b>	<b>21</b>
1.1 Différentes formulations des équations intégrales . . . . .	22
1.1.1 Fonctions de Green de l'Elastodynamique . . . . .	23
1.1.2 Théorème de représentation . . . . .	24
1.1.3 Équations intégrales: formulation directe et indirecte . . . . .	25
1.1.4 Choix de la méthode intégrale . . . . .	27
1.2 Méthode des éléments de frontière . . . . .	29
1.2.1 Discrétisation en espace . . . . .	30
1.2.2 Discrétisation en temps . . . . .	32
1.2.3 Calcul du déplacement à la surface: schéma itératif en temps . . . . .	35
1.3 Applications . . . . .	37
1.4 Modélisation d'une topographie réelle: le Stromboli . . . . .	43
1.4.1 Les caractéristiques du modèle utilisé . . . . .	46
1.4.2 Résultats . . . . .	47
1.4.3 Effets de la source . . . . .	53
1.5 Intérêt et limitations de l'implémentation temporelle . . . . .	56
Annexe 1.A: Algorithme de résolution . . . . .	58
<b>2 Seismic Response of 3D Topographies, using a Time-Domain Boundary Element Method</b>	<b>61</b>
Résumé en français . . . . .	62
Abstract . . . . .	62
2.1 Introduction . . . . .	63
2.2 Boundary Integral Equations . . . . .	64
2.3 BEM Discretization . . . . .	67
2.3.1 Space Discretization . . . . .	67
2.3.2 Time Discretization and numerical noise . . . . .	68



2.3.3	Method of solution . . . . .	69
2.3.4	Spatial Integration and Regularization . . . . .	70
2.3.5	Effects of Model Size Finiteness . . . . .	71
2.4	Comparison with other Methods . . . . .	72
2.4.1	Explosion below a Flat Free Surface . . . . .	73
2.4.2	Vertical Plane S-Wave impinging on a Gaussian Topography . . . . .	75
2.4.3	Plane Wave impinging on an Hemispherical Cavity . . . . .	77
2.4.4	Explosion below a Gaussian topography . . . . .	81
2.5	Conclusions . . . . .	81
2.6	Acknowledgments . . . . .	82
Appendix 2.A: Analytical expressions of displacement and stress tensors in a homogeneous medium, due to a moment tensor $M_{ij}$ . . . . .		84
References . . . . .		85
<b>3</b>	<b>Fonctions de Green des milieux à gradient de vitesse constant (3D)</b>	<b>89</b>
3.1	Milieux hétérogènes à gradient de vitesse constant . . . . .	90
3.2	Fonctions de Green approchées . . . . .	91
3.3	Domaine de validité des fonctions de Green approchées . . . . .	93
3.3.1	Tests de validité . . . . .	94
3.3.2	Cas réels . . . . .	95
3.4	Essais d'amélioration des fonctions de Green approchées . . . . .	99
3.5	Solution en contrainte . . . . .	99
3.6	Conclusion . . . . .	101
Annexe 3.A: Fonctions de Green approchées . . . . .		103
Annexe 3.B: Dérivations en coordonnées bisphériques . . . . .		108
Annexe 3.C: Essais d'amélioration des fonctions de Green . . . . .		110
<b>4</b>	<b>Couplage entre méthodes de frontière et méthodes de domaine: Différences Finies en fréquence</b>	<b>115</b>
4.1	Variété des méthodes de différences finies . . . . .	117
4.2	Méthode des différences finies en déplacement et fréquence . . . . .	119
4.3	Schéma d'ordre 2 optimal . . . . .	120
4.3.1	De l'intérêt d'utiliser un schéma d'ordre 2 . . . . .	120
4.3.2	Les schémas de différentiation optimisés . . . . .	122
4.3.3	Utilisation de repères tournés et de la condensation de masse . . . . .	123
4.3.4	Optimisation du schéma de différences finies d'ordre 2 . . . . .	132
4.4	Résolution du système par une méthode itérative . . . . .	136
4.4.1	Choix d'une méthode itérative . . . . .	138

4.4.2	Méthodes de stockage adaptées à une matrice creuse . . . . .	139
4.4.3	Accélération de la convergence: préconditionnement . . . . .	140
4.5	Validation du schéma de Différences Finies 3D . . . . .	140
4.5.1	Implémentation de la source . . . . .	141
4.5.2	Bords absorbants . . . . .	141
4.5.3	Le repliement en temps: usage d'une fréquence complexe . . . . .	142
4.5.4	Résultats . . . . .	143
4.6	Schéma aux différences finies pour un milieu hétérogène . . . . .	146
4.7	Perspectives: couplage avec les éléments de frontière . . . . .	146
4.8	Conclusion . . . . .	149
Annexe 4.A: Différences Finies dans un milieu hétérogène 3D . . . . .		150
Annexe 4.B: Schéma de Différences Finies en déplacement à l'ordre 4 . . . . .		160

<b>Conclusion générale</b>	<b>163</b>
----------------------------	------------

<b>Références Bibliographiques</b>	<b>165</b>
------------------------------------	------------

## Notations

### Variables:

$\mathbf{x}, \xi$	vecteurs position
$t, \tau$	temps
$\mathbf{u}$ ou $\vec{U}$	vecteur déplacement
$\mathbf{T}$	vecteur contrainte

### Systèmes de coordonnées cartésiennes

$x, y, z$	composantes de $\mathbf{x}$ en coordonnées cartésiennes
$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$	vecteurs directeurs des trois axes du repère cartésien

### Fonctions de Green

$G_{ij}(\mathbf{x}, t, \xi, \tau)$	fonction de Green des déplacements
$\Sigma_{ijk}(\mathbf{x}, t, \xi, \tau)$	fonction de Green des contraintes
$r =  \mathbf{x} - \xi $	distance source-récepteur
$\gamma_i = \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i - \xi_i}{r}$	cosinus directeurs
$\delta_{ij}$	symbole de Kronecker
$\delta(t)$	Dirac en temps
$H(t)$	fonction de Heaviside

### Propriétés des milieux élastiques

$\rho$	masse volumique
$\alpha, \beta$	vitesse des ondes P et des ondes S
$c$	vitesse (P ou S)
$\lambda, \mu$	paramètres élastiques de Lamé
$\sigma$	coefficient de Poisson

### Discretisation des éléments de surface

$\Delta t$	pas de temps
------------	--------------



$\Delta x$	distance entre deux noeuds successifs de la grille horizontale régulière
$L$	distance minimale entre noeuds du maillage (= $\Delta x$ en général)
$G_{Rmin}$	nombre de points minimum par plus petite longueur d'onde de Rayleigh
$\nu_c$	fréquence de Nyquist

*Opérateurs différentiels*

$\vec{\nabla}$	gradient
$\vec{\nabla} \cdot$	divergence
$\nabla^2$	Laplacien
$\vec{\nabla} \times$	rotationnel
$\vec{\nabla}_H = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y$	gradient horizontal
$\nabla_H^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$	Laplacien horizontal

*Systèmes de coordonnées bisphériques*

$\xi, \eta, \phi$	coordonnées bisphériques
$\tau_P, \tau_S$	temps de propagation des premières arrivées des ondes P et des ondes S
$R_w$	rayon du front d'onde sphérique
$R_H = \sqrt{x^2 + y^2}$	rayon horizontal
$\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\phi$	vecteurs directeurs en coordonnées bisphériques

*Différences finies*

$h$	taille de la maille
$N$	nombre de points du modèle selon une direction
$u, v, w$	les 3 composantes du déplacement
$U, V, W$	3 composantes du déplacement, discrétisées aux noeuds
$U_{xx}, V_{xy}, \dots$	approximation discrète des valeurs de $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \dots$
$\mathcal{M}$	matrice de masse (ou opérateur associé)
$\mathcal{K}$	matrice de rigidité (ou opérateur associé)
$\mathcal{I}$	matrice identité (ou opérateur associé)
$K = k_s h / 2\pi = 1/G$	nombre d'onde normalisé (pour les ondes S)
$\hat{v}_{Ph}, \hat{v}_{S1ph}, \hat{v}_{S2ph}$	vitesses de phase numériques
$\hat{v}_{Pgr}, \hat{v}_{S1gr}, \hat{v}_{S2gr}$	vitesses de groupe numériques
$\Delta\nu$	pas de discrétisation en fréquence

## Introduction générale

Dans ce travail de thèse, nous nous sommes donnés pour objectif de mettre au point une méthode de modélisation de la propagation des ondes sismiques qui permette de modéliser le signal "large bande" (LB) dans des structures tridimensionnelles. En effet, le développement et l'utilisation de plus en plus courante de capteurs LB permet, depuis quelques années, d'enregistrer les caractéristiques des signaux sismiques pour des fréquences relativement basses (jusqu'à environ cent secondes de période), inaccessibles par le passé. Cette acquisition est appelée "large bande" parce qu'elle couvre une gamme de fréquences plus vaste que la gamme classique, qui ne dépasse pas des périodes de quelques secondes.

Le développement d'une méthode de modélisation est intéressant particulièrement pour les trois sujets d'études suivants: 1) Les structures régionales alpines, et notamment la profondeur du Moho, sont étudiées via l'analyse des ondes de surface, et éventuellement des ondes de volume. La modélisation d'une structure 3D, comprenant topographie et Moho, pour des ondes de surface (grandes longueurs d'ondes, de quelques dizaines à quelques centaines de kilomètres) permettrait d'obtenir une meilleure évaluation des courbes de dispersion. 2) Les édifices volcaniques sont parfois soumis à des excitations basses fréquences, et l'étude des mécanismes des sources à l'origine de ces vibrations nécessite également une modélisation du signal large bande. De plus, les effets de la topographie sont particulièrement marqués sur ces structures. 3) L'amélioration du calcul des fonctions de Green à des distances régionales devrait également permettre une détermination plus précise des mécanismes des séismes régionaux, grâce à l'utilisation de la forme d'onde complète pour des fréquences allant de 10 s à 1 Hz environ.

La méthode de modélisation utilisée devra donc être capable de fournir la forme de l'onde de manière complète et précise, sur toute la gamme de fréquence concernée, pour des milieux à géométrie tridimensionnelle simple, c'est à dire une surface libre, plus éventuellement une ou deux interfaces en profondeur. Les propriétés élastiques seront considérées homogènes, ou au mieux à gradient 1D. La prise en compte d'une source ponctuelle à



proximité de la surface (à l'échelle des longueurs d'ondes modélisées) devra également être réalisable. Enfin, les calculs devront pouvoir être effectués en un temps suffisamment court et avec des moyens de calcul raisonnables (c'est à dire sur une station de travail).

Effectuons tout d'abord un rapide tour d'horizon des méthodes existantes, pour préciser leurs avantages et leurs défauts, et examiner dans quelle mesure elles peuvent satisfaire les contraintes fixées ci-dessus.

#### Petite revue des méthodes de modélisation utilisées en sciences de la terre:

**LES MÉTHODES DE TRACÉ DE RAI ASYMPTOTIQUES:** elles considèrent la propagation des ondes sismiques de manière analogue à ce que réalise l'optique géométrique pour les ondes lumineuses, en traitant les ondes P et les ondes S de manière découplée. Ces méthodes sont basées soit sur des développements en série de l'équation de l'éikonal dans un système de coordonnées centrées sur le rai (par exemple le tracé de rai dynamique), soit sur d'autres méthodes asymptotiques, comme la technique WKBJ ou celle du faisceau Gaussien (Ben-Menahem & Beydoun, 1985). Pour peu que l'on considère des milieux dont l'hétérogénéité est suffisamment faible (les variations relatives des propriétés du milieu sur une longueur d'onde doivent être petites), ces méthodes sont très efficaces. Elles sont rapides, précises et peu coûteuses en mémoire, mais ce sont des méthodes asymptotiques: elles ne concernent que le domaine des hautes fréquences et ne peuvent donc s'adapter à nos besoins.

**LES MÉTHODES DONNANT LE CHAMP D'ONDE COMPLET:** parmi elles on distingue classiquement les méthodes de domaine, qui nécessitent la discrétisation du milieu dans son ensemble, et les méthodes de frontière, qui se contentent de discrétiser les interfaces (bord, surface libre, discontinuités). Des méthodes hybrides, combinant plusieurs types de méthodes pour profiter des avantages particuliers de chacune, ont également été proposées (par exemple, Moczo et al. (1997) combinent des méthodes de différences finies, d'éléments finis et de nombres d'onde discrets).

Les méthodes de domaine requièrent, en trois dimensions, la discrétisation d'un volume et résolvent localement les équations de l'élastodynamique. Cela donne une grande souplesse dans le choix du modèle et permet de considérer des milieux complètement hétérogènes. En contrepartie, les exigences en mémoire vive deviennent très vite un facteur limitant pour ces méthodes. De plus, la nécessaire troncature du milieu oblige à introduire des conditions de frontières transparentes, de manière à éviter la réflexion d'ondes parasites (Clayton & Engquist, 1977; Cerjan & al., 1985; Stacey, 1988; Higdon, 1991). La dispersion numérique qui apparaît lors de la résolution en temps est également un facteur limitant de la méthode, qui empêche de propager les ondes sur des distances importantes.

La méthode de domaine la plus utilisée en sciences de la terre est la méthode des différences finies, qui est aussi la plus intuitive. Les méthodes d'éléments finis sont un peu moins populaires, car plus difficiles à mettre en oeuvre, notamment à cause de la difficulté de construction des éléments du maillage. Elles permettent pourtant de mieux prendre en compte des géométries irrégulières et d'adapter le maillage aux hétérogénéités du milieu, évitant la sur-discrétisation des zones les plus rapides. En fait, il est possible de montrer que les différences finies sont un cas particulier des méthodes d'éléments finis (Zienkiewicz, 1979), qui représentent donc une formulation plus générale.

- Les méthodes de *différences finies* reposent sur l'évaluation discrète des équations différentielles de l'élastodynamique par des différences finies. Le principe est de réaliser un maillage régulier du milieu, puis d'écrire, en chaque noeud de ce maillage, une version discrétisée de l'équation des ondes. En ajoutant des conditions de bord absorbant et de surface libre, on obtient alors un système linéaire de très grande taille, mais qui est par ailleurs très creux. La résolution de ce système se fait généralement dans le domaine temporel, en calculant les déplacements par pas de temps successifs. L'avantage de ces méthodes est leur facilité de mise en oeuvre ainsi que le caractère intuitif de leur formulation. Par contre, elles sont destinées à la modélisation de domaines de dimensions finies. De plus, les conditions de surface libre et les discontinuités des paramètres élastiques sont mal prises en compte: elles sont généralement traitées comme des "marche d'escalier", ce qui introduit des diffractions parasites. Quoi qu'il en soit, les différences finies sont très utilisées en sciences de la terre. Les différentes formulations possibles et leurs utilisations seront exposées dans le chapitre 4.
- Les méthodes d'*éléments finis* sont basées sur une formulation variationnelle des équations de l'élastodynamique: l'intégrale pondérée des équations différentielles sur tout le volume est nulle quel que soit le choix des fonctions de pondération. La traduction numérique de ce principe est la méthode des résidus pondérés. Le domaine est divisé en éléments de différentes tailles et de différentes formes, sur lesquels sont définies des fonctions d'interpolation, ainsi que des fonctions de pondération. Les équations de l'élastodynamique y sont résolues au sens de la minimisation du résidu pondéré intégré sur chacun des éléments. De nombreuses variantes de ces méthodes sont possibles, suivant la forme des éléments et les fonctions d'interpolation et de pondération choisies. Les méthodes d'éléments finis sont plus délicates à mettre en oeuvre que les différences finies, et leur interprétation physique est moins intuitive. Aussi, leur utilisation est moins répandue en sciences de la terre (Marfurt, 1984; Bielak et al., 1998). Le choix de fonctions de forme et de fonctions de pondération



identiques permet de plus d'obtenir des matrices de masse et de rigidité symétriques, facilitant la résolution du système (méthode de Galerkin).

- Au début des années 1980, ont été introduites en sismologie des méthodes dites *pseudo-spectrales* (Kosloff & Baysal, 1982; Kosloff et al., 1984; Fornberg, 1988; Tessmer et al., 1992; Furumara & Takenaka, 1996; Furumara et al., 1998). Elles utilisent une décomposition spatiale des champs en coefficients de Fourier ou sur des bases de polynômes orthogonaux, type Chebyshev ou Legendre. Cela permet l'évaluation des dérivées spatiales avec une très grande précision. Les méthodes d'*éléments spectraux* (Faccioli et al., 1996; Komatitsch, 1997; Komatitsch & Vilotte, 1998; Komatitsch et al., 1999) sont en fait des méthodes d'éléments finis, qui utilisent les principes des méthodes pseudo-spectrales pour améliorer l'évaluation des dérivées spatiales. Les conditions aux limites sont généralement résolues dans le domaine temporel et la géométrie des surfaces libres est prise en compte de manière exacte. L'utilisation d'une formulation faible assure le respect des conditions de nullité de la contrainte à la surface libre de manière naturelle. Ces méthodes donnent maintenant des résultats tout à fait intéressants, tant du point de vue de la précision que du temps de calcul.

Une des difficultés rencontrées par les méthodes d'éléments finis et d'éléments spectraux est la nécessité de disposer d'un maillage permettant de discrétiser un volume quelconque. Le maillage 3D est un problème difficile, et peut constituer une part non négligeable du temps de calcul. Les méthodes de différences finies, qui n'ont pas à résoudre cette difficulté, ont de ce point de vue un avantage assez net.

*Les méthodes de frontière*, elles aussi, existent sous plusieurs formes. Leur atout majeur réside dans la réduction dimensionnelle de l'espace des inconnues: les exigences en mémoire vive s'en trouvent considérablement réduites. La discrétisation d'une surface est également beaucoup plus simple, et ne demande que peu d'efforts. De plus, les conditions de radiation à l'infini sont satisfaites automatiquement. A ces avantages s'ajoute celui de la précision: une discrétisation à quatre points par longueur d'onde minimum est suffisante, alors que, par exemple, environ 12 points par longueur d'onde sont nécessaires pour les schémas de différences finies d'ordre 2 classiques. Néanmoins, la réduction du nombre d'équations algébriques est contrebalancée par le fait que le système à résoudre est "dense", alors que les méthodes de domaine conduisent à des systèmes certes plus gros, mais très "creux", et éventuellement symétriques dans le cas des éléments finis.

- On peut citer la *méthode "Aki-Larner"* (Aki & Larner, 1970; Geli et al., 1988; Riepl, 1997), qui considère chaque point d'une interface comme un point diffractant. Les

ondes diffractées sont décomposées en ondes planes. L'intégration sur l'ensemble des nombres d'ondes horizontaux et la prise en compte des conditions aux limites conduit à un système linéaire dont la résolution fournit l'amplitude des différentes ondes. Cette méthode est intéressante mais est intrinsèquement inexacte, puisqu'elle néglige une partie du champ diffracté.

- Les *méthodes intégrales* sont des méthodes d'éléments de frontière qui reposent sur un théorème de représentation. Les ondes diffractées ne sont plus considérées comme une superposition d'ondes planes, mais sont données par les fonctions de Green du milieu. Les deux principales variantes de ces méthodes sont la *formulation directe*, qui écrit les conditions aux limites directement en termes de champs de contrainte et de déplacement, et la *formulation indirecte*, qui introduit une distribution de forces aux interfaces comme variable intermédiaire, et peut être interprétée comme une traduction mathématique du principe de Huygens. En 2D, le domaine de résolution des conditions aux limites le plus fréquemment utilisé pour les équations intégrales est celui des fréquences (Bouchon & Coutant, 1994; Pedersen & al., 1994; Pedersen & al., 1996). Avec l'ajout d'une troisième dimension, cette approche devient problématique car elle nécessite, pour chaque fréquence, la résolution de gros systèmes linéaires, non creux et non symétriques. La résolution de problèmes 3D dans le domaine des fréquences a néanmoins été abordée par divers auteurs: Sánchez-Sesma & Luzón (1995), Bouchon et al. (1996), Bouchon & Barker (1997), Luzón et al. (1997), Yokoi & Sánchez-Sesma (1998), Ortiz-Aleman et al. (1998), Durand et al. (1999). Il est à noter que tous utilisent une formulation indirecte, plus satisfaisante du point de vue de l'interprétation physique. Hatayama & Fujiwara (1998) utilisent eux une formulation directe en modes normaux pour calculer les ondes de surfaces secondaires excitées aux bord de bassin sédimentaires tridimensionnels.

### Modélisation 3D, résultats et limitations:

Les amplifications liées aux effets de topographies et de remplissage sédimentaire ont été largement étudiées avec des modèles 2D (Geli et al., 1988; Pitarka & Irikura, 1996). Ces modèles ne sont pas suffisants pour expliquer, notamment, les taux d'amplification élevés observés au sommet de petits reliefs: on a ainsi enregistré, pendant le séisme de Northridge (Californie), en 1994, une accélération de 1.78 g au sommet de la petite colline de Tarzana, à plusieurs kilomètres de l'épicentre (Shakal et al., 1994). Une modélisation qui se rapproche plus des conditions réelles est donc nécessaire. Dans un premier temps, des modèles dits à 2.5D (Pedersen & al., 1994; Song & Williamson, 1995; Furumara & Takenaka, 1996; Pedersen & al., 1996) permettent, pour des milieux bidimensionnels, de calculer le champ d'onde 3D, avec un coût en temps de calcul et en mémoire seulement



un peu plus élevé que celui d'un calcul 2D. Cette technique permet, en particulier, de considérer une source réellement ponctuelle, ce qui n'est pas le cas dans les modélisations 2D, où la source est en fait une ligne, dont les propriétés de décroissance spatiale sont différentes. Pour modéliser les effets des amplifications locales dues à la topographie, des calculs réellement 3D doivent être effectués.

Des modélisations de la propagation des ondes sismiques dans des milieux tridimensionnels hétérogènes réalistes ont déjà été réalisées à l'aide de méthodes de Différences Finies (Frankel & Vidale, 1992; Olsen et al., 1995; Wald & Graves, 1998). On remarque que la résolution est le plus souvent effectuée dans le domaine temporel, mais en utilisant des formulations variées (en déplacement, en déplacement-contrainte ou en vitesse-contrainte). Le problème est que, actuellement, la fiabilité des résultats obtenus n'est pas complètement assurée. Ainsi, lors d'un essai de simulation simultanée du séisme de Kobe (janvier 1995,  $M=6.8$ ), où essentiellement des méthodes de différences finies ont été utilisées, la comparaison des sismogrammes synthétiques obtenus à partir de modèles de propagation semblables montre des formes d'onde très variées d'une méthode à l'autre (ESG, 1998). Une telle imprécision n'est pas acceptable si la forme d'onde est utilisée pour réaliser des inversions. Bien sûr, les propriétés des milieux modélisés seront toujours connus avec une large barre d'erreur, et il peut paraître vain de rechercher une meilleure précision de la modélisation. Pourtant, en se restreignant aux basses fréquences, une modélisation plus précise semble nécessaire si l'on veut mieux exploiter les données acquises.

#### Choix d'une formulation en temps pour les équations intégrales:

Nous avons vu que les méthodes d'éléments de frontière avaient pour caractéristiques une grande précision et une discrétisation relativement aisée. Le plus fréquemment, les implémentations de ces méthodes en sciences de la terre ont été réalisées dans le domaine des fréquences. Au moment du démarrage de ma thèse, il est apparu que le traitement des modèles tridimensionnels n'était possible en fréquence qu'à la condition de disposer de très grosses machines, ayant une mémoire vive suffisante pour réaliser l'inversion de grands systèmes, ou au prix d'approximations importantes (chapitre 1, section 1.1.4). Par contre, les méthodes intégrales étaient déjà utilisées en mécanique et en ingénierie, pour des problèmes d'élastodynamique portants sur des objets tridimensionnels, avec une formulation dans le domaine temporel (Banerjee et al., 1986; Ahmad & Banerjee, 1988). La résolution en temps des équations intégrales permet de s'affranchir du problème de l'inversion d'un gros système, puisque le schéma de résolution peut-être rendu explicite (de type prédicteur-correcteur). C'est cette approche que nous avons retenu et développée au cours de ce travail.

Un des points délicats de cette méthode est que la résolution itérative est instable. L'accumulation des erreurs génère du bruit, qui s'amplifie de façon exponentielle, jusqu'à devenir prépondérant. Il faut pouvoir le maîtriser suffisamment pour qu'il n'apparaisse qu'après le passage des ondes sismiques.

Une autre restriction importante de la méthode est liée aux fonctions de Green utilisées, que l'on ne connaît analytiquement que pour des milieux homogènes. Ceci nous oblige à ne considérer dans nos modélisations que des milieux homogènes par morceaux, limités par des surfaces de discontinuité. Il serait donc intéressant de connaître l'expression des fonctions de Green pour des milieux hétérogènes. En suivant l'approche heuristique proposée par Sánchez-Sesma & al. (1999), nous avons tenté d'utiliser des expressions approchées des fonctions de Green des milieux à gradient de vitesse constant. Le domaine de validité de ces expressions ne permet pas de prendre en compte les gradients importants rencontrés dans certaines structures.

En fin de compte, la méthode d'éléments de frontière que nous avons développée donne des résultats très satisfaisants quand à la précision des sismogrammes obtenus. Par contre, le temps de calcul devient vite prohibitif, dès lors que la taille du modèle est importante. Il est tout de même à noter que la mémoire requise n'est par contre pas une réelle limitation. D'autres méthodes, même si elles sont moins précises, demandent des temps de calcul plus raisonnables. Il nous a alors semblé intéressant d'essayer d'améliorer la méthode des différences finies, plus classique et bien maîtrisée, en corrigeant un de ses principaux défauts: la prise en compte des conditions de surface libre. Nous nous proposons pour cela d'utiliser la méthode des éléments de frontière, qui y réussit particulièrement bien. La combinaison de ces deux méthodes, pour être efficace, doit reposer sur un schéma aux différences finies assez précis pour nous permettre d'utiliser un nombre de points par longueur d'onde réduit. Dans cette optique, nous avons examiné deux approches pour l'optimisation du schéma d'ordre 2, proposées par Stekl & Pratt (1998) d'un côté, et par Geller & Takeuchi (1995) de l'autre, que nous avons adapté au cas 3D.

#### Plan de la thèse:

Ce mémoire est organisé de la manière suivante: dans un premier chapitre, nous développons les équations intégrales qui sont à l'origine de la méthode d'éléments de frontière utilisée, nous détaillons les méthodes de discrétisation employées, nous récapitulons les différents tests effectués, et nous donnons un exemple d'application de la méthode développée sur une topographie réelle, celle du volcan Stromboli. Le chapitre 2 est constitué d'un article soumis et accepté par *Geophysical Journal International* et détaille l'implémentation de la méthode et les résultats obtenus sur les différents cas tests.



Dans le chapitre 3, nous avons testé les possibilités et les limitations de l'emploi d'expressions analytiques approchées des fonctions de Green pour des milieux à gradient de vitesse constant. Leur utilisation augmenterait significativement l'intérêt et les domaines d'application des méthodes intégrales. Enfin, le chapitre 4 présente le développement d'un code de différences finies en fréquence, avec optimisation du schéma aux différences, et sa combinaison avec une méthode du type éléments de frontières pour traiter la surface libre.

## Chapitre 1

# Équations intégrales et méthodes d'éléments de frontière

Les équations intégrales sont à la base de toute une famille de méthodes numériques permettant de résoudre les équations de l'élastodynamique en utilisant une discrétisation par "éléments de frontière". Ces méthodes reposent sur des équations ayant la forme suivante:

$$u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \int_{\partial\Omega} K(\mathbf{x}, \xi) u(\xi) dS_\xi \quad (1.1)$$

où le noyau  $K(\mathbf{x}, \xi)$  est un opérateur fixé par le problème, et où le terme  $f(\mathbf{x})$  représente la contribution au point  $\mathbf{x}$  des sources volumiques intérieures au domaine  $\Omega$ . Ces équations donnent une évaluation du champ  $u(\mathbf{x})$ , en un point  $\mathbf{x}$  de  $\Omega$ , en fonction d'un terme source  $f(\mathbf{x})$  et d'une fonction densité  $u(\xi)$ , à la frontière  $\partial\Omega$ , qui peut être vue comme une collection de sources secondaires. De telles équations apparaissent très souvent en physique (électromagnétisme, mécanique, ...), et sont appelées équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce (les équations de première espèce correspondent à un membre de gauche nul).

Les valeurs inconnues  $u(\xi)$  sont résolues en écrivant les conditions aux limites sur  $\partial\Omega$ , donnant des contraintes sur  $u(\xi)$  ou ses dérivées sur  $\partial\Omega$ . Les valeurs de  $u(\mathbf{x})$  peuvent ensuite être évaluées en n'importe quel point de  $\Omega$  grâce à 1.1. Cette façon de formuler le problème, avec des inconnues positionnées uniquement aux frontières des milieux élastiques, a pour effet de diminuer considérablement leur nombre par rapport à une méthode de domaine (type Différences Finies ou Eléments Finis): l'espace des inconnues est réduit d'une dimension. Nous verrons que cet avantage est renforcé par le fait que la taille requise pour la maille de discrétisation est plus grande que dans la plupart des méthodes de domaine. En contrepartie, les équations à résoudre ne sont plus des équations locales. Les



interactions entre chacun des noeuds sont prises en compte, le système linéaire à résoudre est donc dense: en chaque point, on écrit une relation globale, qui lie toutes les valeurs des champs entre elles.

Dans le cas de l'Elastodynamique, les équations intégrales portent simultanément sur deux champs vectoriels: les champs de déplacement  $\mathbf{u}$  et les champs de contrainte  $\mathbf{T}$ . Le noyau  $\mathbf{K}$  correspond aux tenseurs de Green d'un milieu élastiques, et le terme  $\mathbf{f}$  est une densité de force volumique. Les conditions aux limites que l'on écrit sont la nullité des contraintes à la surface libre et la continuité des déplacements et des contraintes aux interfaces.

Ce chapitre, et le suivant qui est la reproduction d'un article accepté par *Geophysical Journal International*, traitent des méthodes d'éléments de frontière et de l'implémentation en temps que nous en avons réalisé. Le chapitre 1 reprend, en le complétant, le contenu de l'article. Il est plus détaillé en ce qui concerne l'écriture des équations intégrales. Il rappelle les techniques de discrétisation et de résolution, ainsi que les résultats principaux des tests de validation et donne un exemple de modélisation d'une topographie réelle: le Stromboli. Le détail des modèles utilisés est décrit dans l'article et n'est pas repris dans ce chapitre.

Rappelons ici que l'objectif de ce travail est, à terme, de disposer d'une méthode permettant de modéliser avec précision la propagation des ondes sismiques dans des milieux à géométrie tridimensionnelle simple (une topographie et une ou deux interfaces), pour des longueurs d'onde se rapprochant de la taille du modèle. Le champ incident est quelconque, et on doit notamment, dans le cas d'une source ponctuelle, pouvoir placer celle-ci près de la surface.

## 1.1 Les différentes formulations des équations intégrales en Elastodynamique

Les équations intégrales utilisées pour résoudre les équations de l'Elastodynamique peuvent être formulées de différentes manières, chacune ayant ses avantages et ses inconvénients: formulation directe ou indirecte, en temps ou en fréquence, en espace ou en nombre d'onde... Toutes ces formulations reposent sur l'utilisation du *théorème de réciprocité de Betti* (Aki & Richards, p. 25) appliqué aux fonctions de Green du milieu, qui mène au *théorème de représentation*, appelé aussi *identité de Somigliana*.

### 1.1.1 Fonctions de Green de l'Elastodynamique

Nous nous plaçons, comme dans toute la suite de ce mémoire, dans le cadre de l'élasticité linéaire isotrope. La rhéologie du milieu est donc donnée par la loi de Hooke. L'atténuation anélastique ne sera pas prise en compte, ce qui peut se justifier par la faible distance de propagation des ondes modélisées en regard de leurs longueurs d'ondes (fréquences Large Bande).

Le tenseur de Green, noté  $\mathbf{G}(\mathbf{x}, t, \xi, \tau)$ , représente la réponse en déplacement d'un milieu donné à une impulsion unidirectionnelle, localisée en temps et en espace:  $G_{ij}$  est la composante  $i$  du déplacement en  $(\mathbf{x}, t)$  dû à une force ponctuelle appliquée en  $\xi$ , au temps  $\tau$ , suivant la direction  $j$ .

On définit de même le tenseur de Green des contraintes  $\Sigma$ , où  $\Sigma_{ijk}(\mathbf{x}, t, \xi, \tau)$  représente la réponse en contrainte sur la facette perpendiculaire à  $\vec{e}_k$ , due à l'application de la même force que précédemment.  $\Sigma$  s'obtient par application de la loi de Hooke:

$$\Sigma_{ijk}(\mathbf{x}, \xi) = \lambda \delta_{ik} \frac{\partial G_{mj}(\mathbf{x}, \xi)}{\partial x_m} + \mu \left( \frac{\partial G_{ij}(\mathbf{x}, \xi)}{\partial x_k} + \frac{\partial G_{kj}(\mathbf{x}, \xi)}{\partial x_i} \right) \quad (1.2)$$

Les expressions analytiques des fonctions de Green ne sont connues en trois dimensions que pour des configurations très simples. En pratique, nous considérons un milieu homogène infini, dans lequel l'expression des fonctions de Green en déplacement est la suivante:

$$G_{ij}(\mathbf{x}, t, \xi, 0) = \frac{1}{4\pi\rho r} \left[ (3\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}) \frac{1}{r^2} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau \delta(t - \tau) d\tau + \frac{1}{\alpha^2} \gamma_i\gamma_j \delta(t - \frac{r}{\alpha}) - \frac{1}{\beta^2} (\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}) \delta(t - \frac{r}{\beta}) \right] \quad (1.3)$$

et les fonctions de Green en contraintes sont données par:

$$\begin{aligned} \Sigma_{ijk}(\mathbf{x}, t, \xi, 0) = & \frac{1}{4\pi r^2} \left[ 6(\delta_{ij}\gamma_k + \delta_{ki}\gamma_j + \delta_{jk}\gamma_i - 5\gamma_i\gamma_j\gamma_k) \frac{\beta^2}{r^2} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau \delta(t - \tau) d\tau \right. \\ & - 2(\delta_{ij}\gamma_k + \delta_{ki}\gamma_j + \delta_{jk}\gamma_i - 6\gamma_i\gamma_j\gamma_k) \left\{ \delta(t - r/\beta) - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \delta(t - r/\alpha) \right\} \\ & + 2r \frac{\gamma_i\gamma_j\gamma_k}{\beta} \left\{ \dot{\delta}(t - r/\beta) - \frac{\beta^3}{\alpha^3} \dot{\delta}(t - r/\alpha) \right\} \\ & - \delta_{ki}\gamma_j \left( 1 - 2\frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) \left\{ \delta(t - r/\alpha) + \frac{r}{\alpha} \dot{\delta}(t - r/\alpha) \right\} \\ & \left. - (\delta_{jk}\gamma_i + \delta_{ij}\gamma_k) \left\{ \delta(t - r/\beta) + \frac{r}{\beta} \dot{\delta}(t - r/\beta) \right\} \right] \quad (1.4) \end{aligned}$$



En utilisant ces fonctions de Green, les méthodes intégrales ne peuvent prendre en compte que des milieux homogènes par morceaux, ce qui limite les applications possibles. C'est pourquoi nous avons testé au chapitre 3 des fonctions de Green pour des milieux ayant un gradient de vitesse constant.

*Remarque:* une propriété intéressante et utile des fonctions de Green pour les milieux infinis est leur invariance par translation en temps aussi bien qu'en espace. Cela se traduit mathématiquement par:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, t, \xi, \tau) &= G(\mathbf{x} - \xi, t - \tau, \vec{O}, 0) \\ \Sigma(\mathbf{x}, t, \xi, \tau) &= \Sigma(\mathbf{x} - \xi, t - \tau, \vec{O}, 0) \end{aligned} \quad (1.5)$$

où  $\vec{O}$  est l'origine du repère choisi. Ces fonctions dépendent donc en fait de deux variables seulement: une variable scalaire (le temps  $t - \tau$ ) et une variable vectorielle ( $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \xi$ ).

### 1.1.2 Théorème de représentation

Soit un domaine  $\Omega$ , de frontière  $\partial\Omega$ . On note  $\mathbf{G}$  et  $\Sigma$  les fonctions de Green d'un milieu qui contient le domaine  $\Omega$  (par exemple un milieu infini). Les déplacements sont notés  $\mathbf{u}$ , les contraintes  $\mathbf{T}$ , et  $\mathbf{f}$  est la densité volumique de force dans  $\Omega$ . Le champ de déplacement  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  est supposé nul dans  $\Omega$  pour les temps  $t < 0$ . L'application du théorème de réciprocité de Betti aux fonctions de Green du milieu fournit une représentation intégrale du déplacement  $\mathbf{u}$ , valable pour  $\mathbf{x} \notin \partial\Omega$ :

$$\begin{aligned} \kappa u_i(\mathbf{x}, t) &= \int_0^t d\tau \int_{\partial\Omega} G_{ji}(\xi, t, \mathbf{x}, \tau) T_j(\xi, \tau) dS_\xi \\ &\quad - \int_0^t d\tau \int_{\partial\Omega} u_j(\xi, \tau) \Sigma_{jik}(\xi, t, \mathbf{x}, \tau) n_k(\xi) dS_\xi \\ &\quad + \int_0^t d\tau \int_{\Omega} G_{ji}(\xi, t, \mathbf{x}, \tau) f_j(\xi, \tau) dV_\xi \end{aligned} \quad (1.6)$$

$\kappa = 1$  si  $\mathbf{x} \in \Omega$   
 $\kappa = 0$  si  $\mathbf{x} \notin \Omega$

Par la suite, le terme source, c'est à dire l'intégrale de volume de l'équation 1.6 sera simplement noté  $\mathbf{U}^{inc}$ : il représente le champ de déplacement incident, qui serait observé à l'emplacement de la frontière, si le milieu était infini.

L'application à l'équation 1.6 de la loi de Hooke permet d'obtenir, pour la contrainte, une expression du même type que celle obtenue pour le déplacement, mais avec des fonctions de Green ayant un ordre de dérivation supérieur:

$$\kappa \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = \int_0^t d\tau \int_{\partial\Omega} \Sigma_{ilj}(\mathbf{x}, t, \xi, \tau) T_l(\xi, \tau) dS_\xi$$

$$\begin{aligned} & - \int_0^t d\tau \int_{\partial\Omega} u_l(\xi, \tau) \Sigma_{jilk}^{\sigma}(\xi, t, \mathbf{x}, \tau) n_k(\xi) dS_\xi \\ & + \int_0^t d\tau \int_{\Omega} \Sigma_{ilj}(\mathbf{x}, t, \xi, \tau) f_l(\xi, \tau) dV_\xi \end{aligned} \quad (1.7)$$

où l'on note

$$\Sigma_{jilk}^{\sigma}(\xi, \mathbf{x}) = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial \Sigma_{lmk}(\xi, \mathbf{x})}{\partial x_m} + \mu \left( \frac{\partial \Sigma_{lik}(\xi, \mathbf{x})}{\partial x_j} + \frac{\partial \Sigma_{ljk}(\xi, \mathbf{x})}{\partial x_i} \right) \quad (1.8)$$

### 1.1.3 Équations intégrales: formulation directe et indirecte

Les équations 1.6 et 1.7 sont écrites pour  $\mathbf{x} \notin \partial\Omega$ . Pour aboutir à une méthode d'éléments de frontière, les représentations intégrales que nous utilisons doivent être valables également à la frontière. Pour cela, on repart de l'identité 1.6 dans laquelle on fait tendre le point  $\mathbf{x}$  du milieu  $\Omega$  vers un point  $\mathbf{x}_0$  appartenant à la frontière  $\partial\Omega$ .

La difficulté de ce passage à la limite vient du caractère singulier des fonctions de Green. En effet, si on note  $r$  la distance  $|\xi - \mathbf{x}|$ ,  $\mathbf{G}(\xi, \mathbf{x})$  varie comme  $1/r$  quand  $\xi$  tend vers  $\mathbf{x}$  et  $\Sigma$  varie comme  $1/r^2$ .  $\mathbf{G}$  est donc faiblement singulière en 0, alors que  $\Sigma$  est fortement singulière (en anglais *weakly singular* et *strongly singular*, respectivement).

De par la singularité de leurs noyaux, les intégrales auxquels nous allons être conduits sont également singulières. La singularité faible du noyau  $\mathbf{G}$  est éliminée par un simple passage en coordonnées polaires. Pour les intégrales dont le noyau est  $\Sigma$ , le passage en polaire réduit la singularité mais ne l'annule pas. Leur évaluation fait appel à la notion d'intégrale prise au sens de la Valeur Principale de Cauchy (VPC). Cette dernière est notée  $\oint$ , et est définie en 3D, pour une fonction  $f$  fortement singulière intégrée sur une surface  $S$  "suffisamment lisse", par:

$$\oint_S f(\xi - \mathbf{x}) dS_\xi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S-s_\epsilon} f(\xi - \mathbf{x}) dS_\xi \quad (1.9)$$

où  $s_\epsilon$  est l'intersection d'une boule de centre  $\mathbf{x}$  et de rayon  $\epsilon$  avec la surface  $S$  (Krishnasamy et al., 1991).

On peut montrer (Cole et al., 1978; Bonnet, 1995) que le passage à la limite donne les résultats suivants, à condition que la frontière  $\partial\Omega$  ait des propriétés suffisantes de régularité:



$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0 \in \partial\Omega} \int_{\partial\Omega} G_{ji}(\xi, \mathbf{x}) T_j(\xi) dS_\xi = \int_{\partial\Omega} G_{ji}(\xi, \mathbf{x}_0) T_j(\xi) dS_\xi \quad (1.10)$$

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0 \in \partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \Sigma_{jik}(\xi, \mathbf{x}) u_j(\xi) n_k(\xi) dS_\xi = -\frac{1}{2} u_i(\mathbf{x}_0) + \oint_{\partial\Omega} \Sigma_{jik}(\xi, \mathbf{x}_0) u_j(\xi) n_k(\xi) dS_\xi \quad (1.11)$$

Le terme  $-\frac{1}{2} u_i(\mathbf{x}_0)$  de l'équation 1.11, provient de l'"extraction" de la singularité réalisée lors du passage à la limite.

Pour une surface régulière, ce passage à la limite, appliqué à l'équation 1.6, donne l'équation suivante, valable pour  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u_i(\mathbf{x}, t) = & U_i^{inc}(\mathbf{x}, t) + \int_0^t d\tau \int_{\partial\Omega} G_{ji}(\xi, t, \mathbf{x}, \tau) T_j(\xi, \tau) dS_\xi \\ & - \int_0^t d\tau \oint_{\partial\Omega} u_j(\xi, \tau) \Sigma_{jik}(\xi, t, \mathbf{x}, \tau) n_k(\xi) dS_\xi \end{aligned} \quad (1.12)$$

Ainsi, on peut étendre l'équation de représentation 1.6 au cas  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ , en posant alors  $\kappa = 1/2$ , et en considérant les intégrales de surface au sens de la VPC.

Remarquons maintenant que, si les fonctions de Green satisfont des conditions aux limites homogènes (c'est à dire que, en tout point de la frontière, la nullité soit du déplacement, soit de la contrainte est assurée), elles possèdent les symétries suivantes:

$$G_{ij}(\mathbf{x}, \xi) = G_{ji}(\mathbf{x}, \xi) = G_{ij}(\xi, \mathbf{x}) \quad (1.13)$$

$$\Sigma_{ijk}(\xi, \mathbf{x}) = -\Sigma_{ijk}(\mathbf{x}, \xi) \quad (1.14)$$

Cela nous permet de réécrire l'équation 1.6 généralisée sous la forme:

$$\begin{aligned} \kappa u_i(\mathbf{x}, t) = & U_i^{inc}(\mathbf{x}, t) + \int_0^t d\tau \int_{\partial\Omega} G_{ij}(\mathbf{x}, t, \xi, \tau) T_j(\xi, \tau) dS_\xi \\ & + \int_0^t d\tau \oint_{\partial\Omega} \Sigma_{jik}(\mathbf{x}, t, \xi, \tau) u_j(\xi, \tau) n_k(\xi) dS_\xi \\ \kappa = & 1 \text{ si } \mathbf{x} \in \Omega \\ \kappa = & 1/2 \text{ si } \mathbf{x} \in \partial\Omega \text{ et si la surface } \partial\Omega \text{ est régulière en } \mathbf{x} \\ \kappa = & 0 \text{ si } \mathbf{x} \notin \Omega \end{aligned} \quad (1.15)$$

Cette équation ne fait pas intervenir d'autre variable que le déplacement et la contrainte. Avec l'équation donnant  $\sigma_{ij}$  (qui découle de 1.7 de manière comparable, mais dont nous

n'aurons pas besoin pour la suite), elles constituent la *représentation intégrale directe* des champs de déplacement et de contrainte.

Une *représentation intégrale indirecte* du déplacement en  $\mathbf{x}$  peut être obtenue à l'aide des deux représentations intégrales directes données par l'application de 1.15 à  $\Omega$  (problème intérieur) et à son complémentaire (problème extérieur) respectivement. En imposant la continuité des déplacement sur  $\partial\Omega$ , on a la représentation suivante (Coutant, 1989, par exemple):

$$u_i(\mathbf{x}, t) = U_i^{inc}(\mathbf{x}, t) + \int_0^t d\tau \int_{\partial\Omega} G_{ij}(\mathbf{x}, t, \xi, \tau) \Psi_j(\xi, \tau) dS_\xi \quad (1.16)$$

Cette équation est valable que le point  $\mathbf{x}$  soit à l'intérieur, à l'extérieur, ou sur la frontière de  $\Omega$ . Dans cette équation, la fonction densité  $\Psi$ , associé au noyau  $\mathbf{G}$ , est un potentiel de simple couche, qui représente le saut de contrainte à la frontière  $\partial\Omega$ .

En utilisant à nouveau la loi de Hooke pour  $\mathbf{x} \in \Omega$  et en effectuant un passage à la limite (toujours sur une surface  $\partial\Omega$  régulière), nous obtenons une représentation de la contrainte en  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$  (Sánchez-Sesma & Campillo, 1991):

$$\tau_i(\mathbf{x}, t) = T_i^{inc}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} \Psi_i(\mathbf{x}, t) + \int_0^t d\tau \oint_{\partial\Omega} \Sigma_{ijk}(\mathbf{x}, t, \xi, \tau) \Psi_j(\xi, \tau) n_k(\mathbf{x}) dS_\xi \quad (1.17)$$

où le champ de contrainte incident  $\mathbf{T}^{inc}$  est défini par

$$T_i^{inc}(\mathbf{x}, t) = \int_0^t d\tau \int_{\Omega} \Sigma_{ijk}(\mathbf{x}, t, \xi, \tau) f_j(\xi, \tau) n_k(\mathbf{x}) dV_\xi \quad (1.18)$$

Les équations 1.16 et 1.17 représentent la formulation indirecte des équations intégrales. Elles utilisent une fonction de densité unique (représentation de simple couche): la distribution auxiliaire  $\Psi$ , qui représente physiquement une force.

### 1.1.4 Choix de la méthode intégrale

#### Formulation directe ou indirecte?

Que l'on utilise la formulation directe ou indirecte, la discrétisation des équations intégrales et la prise en compte des conditions aux limites (contraintes nulles à la surface et continuité des déplacements et des contraintes aux interfaces, complétées par d'éventuelles conditions de bords absorbants aux limites du modèle) conduit à un système linéaire. Si la formulation directe est utilisée, la résolution du système fournit directement les valeurs des champs de déplacement et de contrainte aux frontières.



L'emploi de la formulation indirecte conduit dans un premier temps à l'obtention du potentiel  $\Psi$ . Dans un deuxième temps, l'utilisation des équations 1.16 ou 1.17 permet l'obtention du déplacement  $\mathbf{u}$  et de la contrainte  $\mathbf{T}$  en n'importe quel point de  $\Omega$  ou de sa frontière.

Il est à noter que la représentation indirecte est plus satisfaisante d'un point de vue physique, car les équations 1.16 et 1.17 traduisent mathématiquement le principe de Huygens. La densité de force  $\Psi$  inconnue, agit comme une distribution de sources secondaires à la frontière du domaine, dont l'action à distance est exprimée par les fonctions de Green.

Cependant, le choix de la représentation directe nous semble le plus naturel quand il s'agit de modéliser une topographie. En effet, les contraintes étant par définition nulles à la surface libre, le champ de déplacement à la surface se résout directement grâce à 1.15, sans être obligés d'écrire explicitement une équation portant sur la contrainte. On évite ainsi la deuxième étape, nécessaire avec une formulation indirecte, qui est le calcul des déplacements  $\mathbf{u}$  à partir du champ  $\Psi$ . Remarquons néanmoins que la singularité des intégrales à évaluer est la même quelle que soit la formulation retenue: la présence de la fonction  $\Sigma$  entraîne une singularité forte des intégrales.

### Formulation en fréquence ou en temps?

Si l'on choisit de travailler dans le domaine des fréquences, la résolution des conditions aux limites demande l'inversion de gros systèmes linéaires, denses et non symétriques. L'inversion des matrices complètes pour des modèles réalistes n'est alors pas possible, et on doit avoir recours à des astuces qui simplifient la résolution des gros systèmes. L'une d'elle consiste à "creuser" artificiellement la matrice à inverser, pour ne conserver, à l'aide d'un critère de coupure, que les termes dont la contribution est prépondérante (Bouchon et al., 1995; Ortiz-Aleman et al., 1998). Cela permet d'utiliser une méthode itérative pour réaliser l'inversion, comme par exemple la méthode du gradient bi-conjugué. Cette méthode n'est valable que pour les hautes fréquences. A basse fréquence, la décroissance spatiale des fonctions de Green est plus lente, et il n'est plus possible de négliger autant de termes (on pourrait par contre utiliser une discrétisation moins fine de la surface, mais cela demande un effort supplémentaire).

Toujours dans le but d'accélérer les méthodes d'inversion itératives, Fujiwara (1998) utilise la méthode dite "fast multipole" basée sur une décomposition multipolaire des fonctions de Green  $\mathbf{G}(r)$ . Cette approche permet de réduire la mémoire nécessaire pour effectuer un produit matrice-vecteur, et fait surtout passer le nombre d'opérations scalaires à effectuer d'une valeur proportionnelle à  $N^2$  à une valeur proportionnelle à  $N \log N$ .

environ. Comme le nombre d'inconnues est généralement au minimum égal à quelques milliers, le gain obtenu est très appréciable. Par contre, cette méthode est techniquement assez difficile à mettre en oeuvre.

Une autre méthode de résolution dans le domaine des fréquences, permettant de réduire les exigences de calcul, est proposée par Sánchez-Sesma et al. (1999b). Elle consiste en l'utilisation d'une formulation variationnelle dans laquelle la densité de force est décomposée sur une base de fonctions cosinus, et où l'application de la méthode de Galerkin conduit à un système linéaire symétrique. La restriction de la décomposition à une base incomplète de fonctions cosinus permet de réduire la taille des systèmes sans perdre trop de précision.

La résolution des conditions aux limites dans le domaine temporel s'effectue toujours par itérations successives sur les pas de temps. L'équation de représentation intégrale 1.15 donne l'expression du champ  $\mathbf{u}$  au temps  $t$  en fonction des valeurs prises par les champs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{T}$  aux temps  $\tau \leq t$ : sa discrétisation conduit naturellement à une formulation implicite. On peut choisir de résoudre le système ainsi obtenu, pour chaque pas de temps (Mansur & Brebbia (1982); Rice & Sadd, 1984; Banerjee et al., 1986; Coda & Venturini, 1995 par exemple). On peut également rendre cette formulation explicite (Cole et al., 1978; Peirce & Siebrits, 1997), par exemple en utilisant un pas de temps suffisamment réduit et des fonctions d'interpolation constantes par morceaux. C'est cette voie que nous avons adoptée.

Finalement, il est intéressant de conserver l'idée, utilisée par Bouchon et al. (1995), que certaines contributions sont plus importantes que d'autres, et que le signal peut être obtenu avec une précision correcte en n'utilisant que environ 10% des termes du calcul. Si nous trouvons le moyen de déterminer à priori quels sont ces termes, et que l'erreur commise est suffisamment faible pour permettre une résolution par itérations en temps (procédé qui a tendance à amplifier l'erreur commise), on peut alors éviter le calcul de nombreux coefficients. Un gain en temps de calcul d'environ un ordre de grandeur serait envisageable dans ce cas.

## 1.2 Discrétisation et résolution: Méthode des éléments de frontière

Les méthodes d'éléments de frontière sont basées sur la discrétisation des équations intégrales développées ci-dessus, auxquelles sont imposées des conditions aux limites. Le



principe de la discrétisation est donné en repartant de l'équation 1.1. La surface  $\partial\Omega$  est discrétisée en  $N_e$  éléments  $S_n$ , à l'intérieur desquels sont définis des fonctions d'interpolation  $\phi^i$  décrivant les variations des champs inconnus  $u(\xi)$ . Les noeuds du maillage, qui peuvent correspondre aux coins ou aux centres des éléments de surface, sont notés  $\mathbf{x}^k$ , et on note également  $u^k = u(\mathbf{x}^k)$ . L'interpolation des champs  $u(\xi)$  est de la forme:

$$u(\xi) = \sum_{i=1}^{N_e} \phi^i(\xi) u^i \quad (1.19)$$

Le découpage de la surface libre en petits éléments permet de considérer les intégrales de surface comme la somme des intégrales élémentaires prises sur chacun des éléments. L'équation 1.1 discrétisée au point  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^k$  prend alors la forme:

$$\begin{aligned} u^k &= f^k + \sum_{n=1}^{N_e} \int_{S_n} K(\mathbf{x}^k, \xi) \sum_{i=1}^{N_e} \phi^i(\xi) u^i dS_\xi \\ &= f^k + \sum_{n=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} u^i \int_{S_n} K(\mathbf{x}^k, \xi) \phi^i(\xi) dS_\xi \end{aligned} \quad (1.20)$$

Les intégrales de surface élémentaires qui apparaissent peuvent être évaluées, suivant les cas, soit de manière analytique, soit de manière numérique, par quadrature gaussienne.

Dans le cas de l'élastodynamique, le champ de déplacement est également discrétisé en temps, et l'intégration temporelle est décomposée en une somme d'intégrales sur des petits pas de temps. Dans notre implémentation, la résolution des conditions aux limites est effectuée par une *méthode de collocation*, c'est à dire que nous écrivons en chaque noeud du maillage les équations intégrales discrétisées prenant en compte les conditions aux limites. Ce n'est pas la seule façon de procéder: on pourrait aussi, par exemple, utiliser une méthode variationnelle, qui implique la minimisation de résidus pondérés (Mansur & Brebbia, 1982; Sánchez-Sesma et al., 1999b)

Les méthodes d'éléments de frontières sont applicables en théorie à des milieux comportant un nombre quelconque d'interfaces (i.e. surfaces délimitant deux milieux aux propriétés élastiques distinctes). En pratique, la modélisation 3D implique de restreindre le nombre d'éléments de surface considérés. Nous nous sommes donc limités dans nos applications au cas d'une topographie recouvrant un demi-espace homogène, et nous ne traiterons plus, dans la suite du chapitre, que ce type de configuration.

### 1.2.1 Discrétisation en espace

Dans un premier temps, la discrétisation en éléments de surface était effectuée à l'aide de disques plans, en essayant de recouvrir la surface de manière régulière, avec des tailles

de disque homogènes. Cette discrétisation était un peu grossière. Son avantage principal est de permettre une simplification de l'évaluation des intégrales fortement singulières qui apparaissent lors du calcul des termes d'auto-influence (ces termes correspondent à l'intégration sur l'élément de surface sur lequel est situé le point de collocation considéré, voir chapitre 2, section ??). Cette approche a été utilisée avec succès en fréquence par Sánchez-Sesma & Luzón (1995), mais pour des champs incidents dont les variations spatiales sont douces: ils ne considèrent que des ondes planes ou des ondes de Rayleigh incidentes. Il s'est avéré que cette discrétisation, associée avec un schéma d'interpolation spatial d'ordre peu élevé (interpolation barycentrique sur trois points) ne permettait pas l'introduction d'une source ponctuelle proche de la surface. En fait, le cas de la source superficielle n'est jamais traité par les éléments de frontière habituels, or il est tout à fait nécessaire de pouvoir traiter ce dernier cas, du fait des longueurs d'ondes importantes que nous cherchons à modéliser.

La difficulté de cette configuration tient dans l'observation que l'échantillonnage du champ incident est d'autant plus mauvais que la source est proche de la surface (Figure 1.1). La nécessité d'un schéma d'interpolation et d'intégration précis est donc mise en avant.

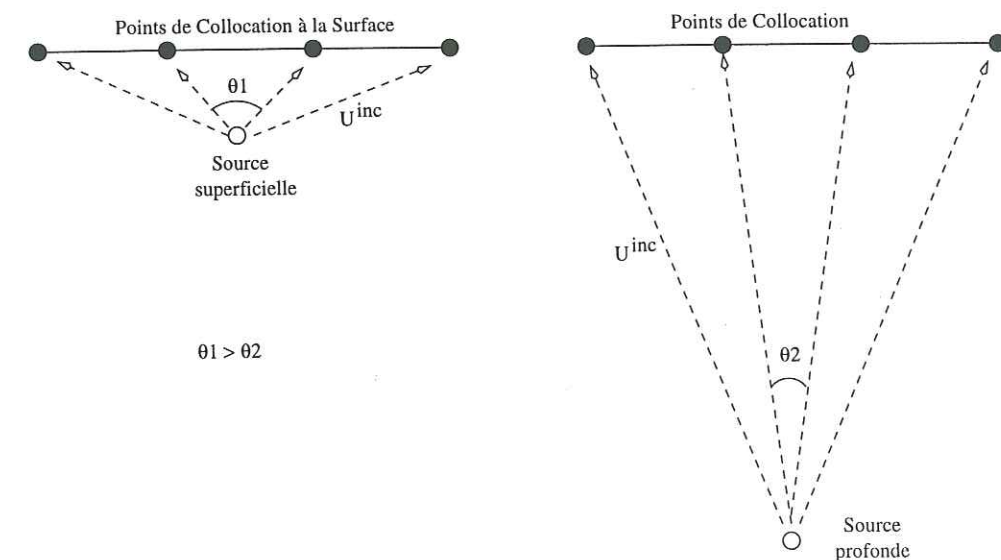


FIG. 1.1 – L'échantillonnage angulaire de la source (terme  $U^{inc}$  dans l'équation 1.15) est nettement moins précis lorsque celle-ci est proche de la surface

Pour obtenir cette précision, la discrétisation spatiale est effectuée en utilisant un quadrillage régulier, de pas  $\Delta x$ , suivant les deux coordonnées horizontales, qui permet l'emploi d'une interpolation d'ordre élevé. Nous utilisons une interpolation par un polynôme de Lagrange d'ordre 4 en  $x$  et  $y$ , qui donne une précision en  $\Delta x^5$  (le schéma est



d'ordre 5). Les noeuds du maillage correspondent aux centres des éléments de surface. Ces éléments de surface sont plans, de forme rectangulaire, et permettent une intégration numérique aisée, par points de Gauss. Ils ne sont pas jointifs, et ne forment donc pas un recouvrement exact de la surface. Néanmoins, la surface est mieux discrétisée de cette façon qu'à l'aide des disques plans que nous utilisons initialement. L'approximation par un disque reste utilisée uniquement pour le calcul du terme d'auto-influence, de manière à profiter de la simplicité de la régularisation.

La taille des éléments du maillage est déterminée par les longueurs d'ondes minimales à modéliser correctement. Les différents tests effectués, exposés un peu plus loin, nous ont conduit à considérer que quatre points par longueur d'onde minimale étaient nécessaires pour un calcul précis. On note cette condition

$$G_{R_{min}} \equiv \frac{\lambda_{R_{min}}}{L} < 4 \quad (1.21)$$

où  $L$  est la distance minimale entre deux points du maillage, et l'indice  $R_{min}$  signifie que les longueurs d'ondes minimales sont calculées sur la base de la vitesse de propagation des ondes de Rayleigh.

Par contre, une discrétisation fine de la topographie peut être imposée par ses fortes aspérités, et peut exiger un nombre de points par longueur d'onde beaucoup plus grand. Cela a été le cas par exemple pour la modélisation du Stromboli, exposée plus loin.

La présence d'une source proche de la surface nécessite également un raffinement de la discrétisation. *L'expérience montre que, typiquement, le pas d'échantillonnage spatial ne doit pas dépasser la distance source-surface.*

### 1.2.2 Discrétisation en temps

La discrétisation en temps se fait avec un pas constant  $\Delta t$  et on utilise une interpolation linéaire. Dans les méthodes d'éléments de frontière, la détermination du pas de temps n'est pas soumise à des conditions de stabilité et de convergence aussi nettes que celles énoncées par exemple pour les différences finies.

Les fonctions de Green de l'Elastodynamique sont des fonctions causales: elles propagent les effets à distance avec une vitesse finie. Donc les équations intégrales 1.15 respectent aussi la causalité. Comme les fonctions d'interpolation que nous utilisons ont des dépendances séparées en temps et en espace, ce qui est en soi non causal, elles doivent être suffisamment localisées pour ne pas violer trop ce principe de causalité (Cole et al., 1978). Afin de localiser l'interpolation en temps, nous devons limiter la taille du pas de

temps utilisé. Ainsi, au cours d'une itération, les ondes ne doivent pas pouvoir se déplacer jusqu'à des noeuds éloignés (Mansur & Brebbia, 1982). Le pas de temps  $\Delta t$  est choisi proche de la valeur  $\Delta t \simeq L/\alpha$ . Cela permet d'assurer que la finesse du maillage est bien exploitée, mais ne constitue pas une limite stricte, et ne garantit de toute façon pas la causalité de manière exacte.

Les propriétés d'invariance par translation en temps des fonctions de Green entraînent la résolution d'un système ayant une forme identique à chaque itération. Ceci peut permettre l'amplification du bruit (Cole et al., 1978). Cette amplification a été observée dans les formulations explicites (Rynne, 1985; Peirce & Siebrits, 1997), mais aussi dans les formulations implicites (Coda & Venturini, 1995). Des analyses de la stabilité du schéma de résolution en temps (time marching) ont été réalisées par Cole et al. (1978), Rynne (1985) et Peirce & Siebrits (1997) et permettent de montrer que le choix d'un pas  $\Delta t$  menant à un schéma stable est théoriquement possible, mais ne conduisent pas à un critère général de stabilité. D'autres pensent que ce schéma est instable par nature, quel que soit le choix du pas de temps (I. Terrasse, communication personnelle). Finalement, il semble que le bruit soit toujours susceptible d'être amplifié, et aucune règle simple ne permet de garantir la stabilité d'un schéma pour un choix de  $\Delta t$ , même en se limitant à un nombre d'itérations données.

D'après les différents tests que nous avons effectué, nous constatons que le bruit numérique est caractérisé par une amplitude qui croît exponentiellement et une période relativement fixe, correspondant à environ quatre pas de temps, soit une fréquence  $f_{bruit}$  proche de 0.5 fois la fréquence de Nyquist  $\nu_c = \frac{1}{2\Delta t}$ . Or, la fréquence maximale  $f_{max}$  que nous considérons vérifie:

$$G_{R_{min}} \equiv \frac{\lambda_{min}}{L} \simeq \frac{0.92 \beta / f_{max}}{\alpha \Delta t} \simeq \frac{1.86 \beta}{\alpha} \frac{\nu_c}{f_{max}} \simeq 1.07 \frac{\nu_c}{f_{max}} \quad (1.22)$$

soit, en choisissant  $G_{R_{min}} = 4$ , la relation:  $f_{max} \simeq 0.27 \nu_c < 0.5 \nu_c < f_{bruit}$ . Les plages de fréquences du bruit et du signal ne se recouvrent donc pas, et il paraît intéressant d'examiner les possibilités de filtrage de ce bruit.

Il est clair que l'application d'un filtre à chaque itération ne peut être envisagée, car quel que soit ce filtre, le signal finirait par être complètement déformé. On peut imaginer de ne filtrer à chaque itération que le dernier pas de temps calculé. Ce filtrage serait nécessairement causal, et introduirait donc un déphasage. Cette solution n'est pas non plus satisfaisante. Par contre, une opération de filtrage est envisageable lors de l'interpolation des valeurs du champs de déplacement et de ses dérivées temporelles. Nous nous sommes aperçus que l'apparition du bruit était très fortement conditionnée par le choix de la formule d'évaluation de la dérivée temporelle du champ de déplacement. Nous avons donc



essayé de déterminer une expression de la dérivée qui atténue suffisamment les fréquences proches de  $\nu_c/2$ .

Sur la Figure 1.2, trois formules envisageables pour l'évaluation numérique d'une dérivée sont comparées, du point de vue de la perturbation du spectre qu'elles engendrent. On observe que les fréquences correspondants à  $\nu_c/2$  sont effectivement très atténuées dans le cas (c), où la dérivée est obtenue grâce à  $u'_m = (u_{m+2} - u_{m-2})/4\Delta t$ , mais l'atténuation est également relativement importante pour les fréquences qui sont à modéliser (celles inférieures à  $0.27 \nu_c$ ). En fin de compte, c'est le schéma aux différences centrées qui a été retenu, après essais, pour être utilisé dans le code d'éléments de frontière. Il réalise le meilleur compromis entre l'atténuation des fréquences à  $\nu_c/2$  d'une part et la faible distorsion du signal d'autre part. L'interpolation nécessaire pour l'évaluation de la dérivée ou du déplacement lui-même à un temps  $t$  quelconque est effectuée linéairement entre deux pas de temps successifs. Elle introduit bien sûr également un filtrage atténuant les hautes fréquences.

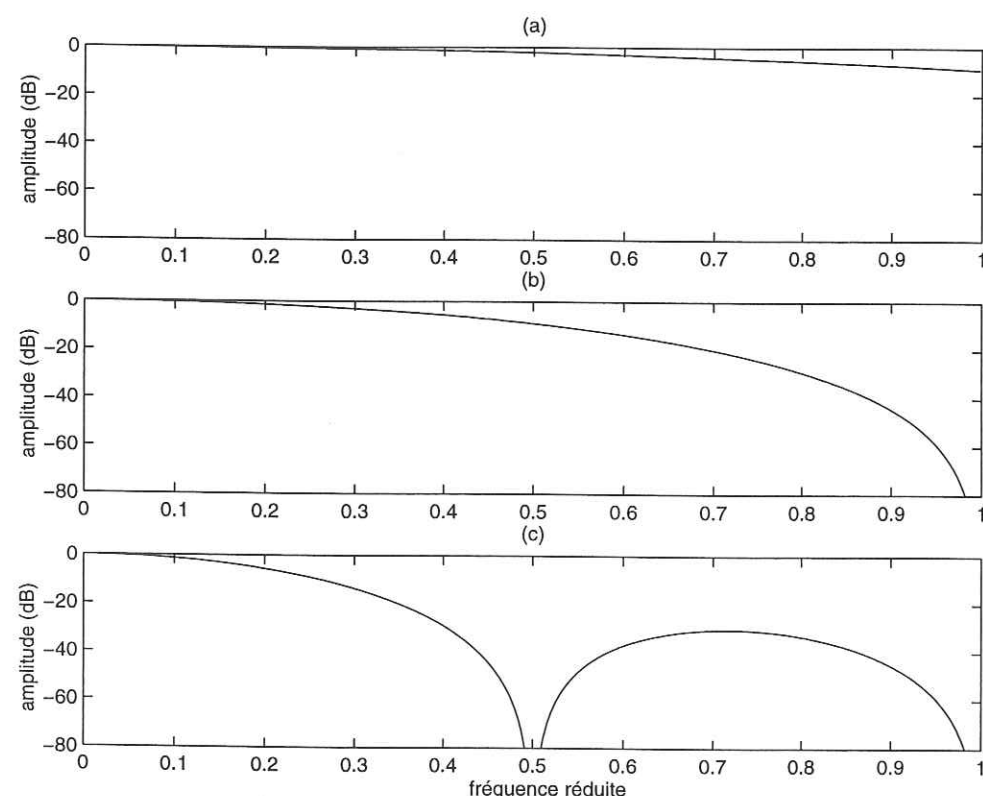


FIG. 1.2 – Réduction de l'amplitude lors du calcul numérique d'une dérivée, en fonction de la fréquence du signal échantillonné, exprimée en proportion de la fréquence de Nyquist  $\nu_c$ . (a) avec la formule  $u'_{m+1/2} = [u_{m+1} - u_m]/\Delta t$ , (b) avec la formule des différences centrées  $u'_m = [u_{m+1} - u_{m-1}]/2\Delta t$ , (c) avec la formule  $u'_m = [u_{m+2} - u_{m-2}]/4\Delta t$ .

La méthode exposée ci-dessus ne permet pas de supprimer le bruit à coup sûr. D'une manière générale, plus les schémas d'interpolation sont d'ordre élevé, meilleure est la précision, mais plus on risque de constater une arrivée précoce du bruit. Comme on ne dispose pas d'un critère de prévision de son apparition, il est préférable de choisir le pas de temps le plus grand possible, de manière à limiter le nombre d'itérations pour une même longueur de sismogramme, quitte à ajuster sa valeur par tâtonnement, si l'amplification constatée est trop importante.

Dans le cas où les variations de la topographie se font à des échelles nettement plus petites que la taille des plus petites longueurs d'onde modélisées (c.f. Stromboli), le pas de temps employé n'est alors pas forcément tenu de se conformer à la taille de la maille choisie. Cela signifie que l'on peut dans ce cas choisir un pas de temps nettement supérieur à  $L/\alpha$ , la faible valeur de  $L$  permettant uniquement de conserver une bonne précision dans l'évaluation des intégrales de surface. Nous n'avons pu déterminer de critère permettant de choisir la valeur de  $\Delta t$ . On peut commencer par effectuer le calcul avec une valeur relativement grande de  $\Delta t$ , qui permet un calcul relativement rapide et réduire progressivement sa valeur jusqu'à obtenir une convergence suffisante.

### 1.2.3 Calcul du déplacement à la surface: schéma itératif en temps

La condition de nullité de la contrainte à la surface libre annule tout simplement la première intégrale de l'équation 1.15. Il reste donc seulement l'intégrale dont le noyau est  $\Sigma$ , et l'équation n'a plus pour inconnues que les déplacements  $u(\xi, t)$ . Un système linéaire portant sur les valeurs des déplacements est obtenu en écrivant les équations intégrales discrétisées en chacun des points de collocation (les noeuds du maillage).

L'intégration en temps est effectuée de façon analytique en considérant une interpolation linéaire pour le déplacement. L'intégration spatiale est, elle, réalisée numériquement, par quadrature gaussienne, le nombre de points de Gauss par élément de surface étant décroissant avec la distance au point de collocation. Les techniques d'intégration mises en oeuvre sont décrites plus en détail au chapitre 2.

La prise en compte des bords du modèle, qui ne doivent pas créer de réflexions parasites, est réalisée par l'application d'une apodisation spatiale: l'amplitude des déplacements est multipliée à chaque pas de temps par une fonction  $f(l)$  décroissante sur les bords du modèle, qui a la forme suivante:

$$f(l) = \frac{1}{2}(1 - \cos(\pi l/D)), \quad \text{pour } l \leq D$$



$$\text{et } f(l) = 1 \quad \text{pour } l > D \quad (1.23)$$

où  $l$  est la distance du noeud considéré au bord du modèle, et  $D$  est la largeur d'apodisation. Des tests numériques nous ont conduit à choisir comme largeur d'apodisation  $D \simeq 6\Delta x$ . Ce procédé a été proposé par J. Virieux (communication personnelle) et par Cerjan et al. (1985), qui l'utilisent pour différentes méthodes (différences finies, éléments finis, ...). Bien qu'extrêmement simple, cette façon de procéder permet effectivement d'éliminer presque totalement les réflexions parasites.

Comme il a déjà été mentionné plus haut, les méthodes d'éléments de frontière, même si elles ne nécessitent que la discrétisation d'une surface et non d'un volume, prennent en compte les interactions de chaque couple d'éléments entre eux. Si ces équations sont écrites dans le domaine des fréquences, nous sommes conduits à la résolution d'un très gros système, où tous les coefficients sont non-nuls. Ceci n'est pas réalisable avec les moyens actuels. Pour fixer les idées, en notant  $N$  le nombre moyen d'éléments dans une direction, le système à résoudre a pour dimension  $3N^2 \times 3N^2$ . Donc pour une valeur modeste de  $N$  ( $N = 50$  par exemple), la taille du système est déjà de  $7500 \times 7500$ .

L'intérêt de la résolution en temps vient de la possibilité d'écrire le schéma de résolution sous une forme explicite, moyennant quelques approximations. On calcule alors les sismogrammes en avançant par pas de temps successifs, de manière itérative ("time marching scheme"). Cependant, le nombre de coefficients intervenants pour la résolution d'un pas de temps est si important qu'il n'est en général pas possible de les conserver tous en mémoire simultanément: on devrait mémoriser de l'ordre de  $3N^2 * 3N^2 * M = 9MN^4$  coefficients (où  $M$  est le nombre de pas de temps à calculer). Avec la même valeur de  $N$  et pour  $M = 100$ , par exemple, en utilisant un codage des réels en simple précision (4 octets), la mémoire vive nécessaire représente déjà 22 Go! En pratique, les seules valeurs que l'on garde en mémoire sont les distances entre points de collocations, les distances à la source et les distances aux points d'intégration de Gauss, pour éviter d'avoir à recalculer les racines carrées à chaque itération. Remarquons que le stockage des distances points de collocation à points de collocation représente déjà  $N^2(N^2 - 1)/2 \simeq N^4/2$  valeurs, soit 200 Mo de mémoire pour  $N=100$ .

Une alternative permettant de gérer au mieux la mémoire disponible est de ne garder qu'une partie des coefficients nécessaires en mémoire. Les équations intégrales sont écrites sous la forme suivante:

$$\vec{U}^M = \sum_{m=0}^M \mathcal{B}^m \vec{U}^{M-m} \quad (1.24)$$

où  $M$  est le pas de temps auquel les équations sont résolues, et  $\vec{U}^m$  est le vecteur contenant

tous les déplacements aux noeuds du modèle, au temps  $t = m\Delta t$ . Les matrices  $\mathcal{B}^m$  (qui sont creuses) sont conservées en mémoire pour  $m = 0, \dots, n$ , où  $n$  est la plus grande valeur permise par la quantité de mémoire disponible. Les coefficients des matrices qui n'ont pas pu être stockées devront être recalculés à chaque itération.

On remarque que le nombre de coefficients non nuls des matrices  $\mathcal{B}^m$  croît avec  $m$  car la causalité des fonctions de Green implique que plus on remonte loin en arrière dans l'histoire du milieu, plus les contributions peuvent venir de points lointains. Au-delà d'un certain temps, on a atteint les limites du modèle, et aucune contribution supplémentaire ne peut plus être calculée. Ceci explique que les premiers pas de temps soient rapides à calculer, puis que les itérations soient de plus en plus lentes. Ainsi, à la différence des méthodes qui résolvent les équations de l'élastodynamique de manière locale, le temps de calcul d'un sismogramme par la méthode des éléments de frontière n'est pas proportionnel à sa longueur. Par contre, si la longueur du sismogramme à calculer est fixée, et que le calcul est effectué successivement avec deux valeurs du pas de temps différentes (par exemple pour tester la convergence de la solution), le temps de calcul sera en première approximation effectivement proportionnel au nombre d'itérations nécessaires. En effet, le taux de remplissage des matrices  $\mathcal{B}^m$ , qui détermine de façon linéaire le temps de calcul, ne dépend pas de l'indice  $m$  lui-même, mais du temps  $m\Delta t$  qui lui est associé.

D'autre part, la décroissance en  $1/r^2$  des fonctions de Green  $\Sigma$  peut faire penser que seuls les éléments les plus proches du point de collocation où est écrit l'équation de représentation ont une contribution significative, et que donc un nombre important de termes peuvent être négligés dans l'évaluation des intégrales de surface. Ce raisonnement n'est en fait pas valable, car il faut également tenir compte de la répartition de l'énergie des ondes sur la surface libre: la convolution des fonctions de Green avec le déplacement  $u$  nous oblige à ne négliger aucune portion de la surface libre à l'intérieur du cône de causalité.

### 1.3 Applications

La méthode développée a été testée sur différents modèles de topographie, et les principaux résultats sont rappelés ici. Le détail des modèles utilisés peut être trouvé dans l'article (chapitre 2).

- Le modèle le plus simple, qui est une surface libre plane, permet de comparer la méthode avec celle des nombres d'onde discrets. Un tel modèle ne pose aucun problème pour une onde incidente plane. L'intérêt du test réside dans le traitement des



ondes inhomogènes (ou ondes évanescentes). L'amplitude de ces ondes décroît avec la profondeur  $z$  comme  $\exp^{-\gamma|z-z_0|}$ . Elles n'atteignent la surface avec une énergie non négligeable que si la source est suffisamment proche de la surface. Dans ce cas, l'interaction avec la surface libre crée des ondes de surface. Ainsi, en considérant une source explosive isotrope proche de la surface, des ondes de Rayleigh doivent être observées, se propageant à la surface à une vitesse d'environ 0.92 fois celle des ondes S (en prenant comme valeur du coefficient de Poisson  $\sigma = 0.25$ ). Pour arriver à modéliser ces ondes de manière correcte, l'emploi d'un schéma d'interpolation spatial d'ordre 5 a été nécessaire, de manière à bien prendre en compte les variations rapides du champ incident à la surface. D'autre part, il a pu être déterminé qu'une discrétisation de la surface à 4 points par longueur d'onde de Rayleigh minimum était suffisante. Les résultats obtenus par les deux méthodes sont donnés par les Figures 2.1 et 2.2, pour deux positions différentes de la source. Quand la source se rapproche de la surface, les ondes de Rayleigh deviennent prépondérantes sur les sismogrammes, et sont toujours obtenues avec une bonne précision, et très peu de dispersion. Il est à remarquer que le test de la source ponctuelle sous une surface libre plane est celui qui a été retenu comme test d'évaluation (benchmark), à la suite du congrès ESG 1998, pour tenter de comparer les différentes méthodes de différences finies entre elles.

- Le calcul des effets diffractants d'une topographie tridimensionnelle sur une onde plane S à incidence verticale a pu être comparé avec les résultats obtenus par la méthode d'éléments spectraux de Komatitsch & Vilotte (1998). La topographie considérée est une colline en forme de gaussienne, à section elliptique, deux fois plus longue que large (Figure 2.3). Les ondes S sont polarisées selon la plus petite largeur et leur longueur d'onde dominante est égale à la hauteur de la colline. La comparaison des résultats montre un très bon accord entre les deux méthodes, même en ce qui concerne les ondes de Rayleigh (Figure 2.4).
- Le cas où la surface libre forme une cavité hémisphérique permet de tester la robustesse du code en présence de reliefs abrupts (le bord de la cuvette forme en effet un angle droit, voir Figure 2.5). La discrétisation ne peut dans ce cas être faite selon une grille régulière, et le schéma d'interpolation spatial est alors d'un ordre moins élevé: une interpolation barycentrique sur les trois noeuds les plus proches du point d'interpolation est utilisée. De plus, les éléments de surface considérés sont des disques plans, d'où un recouvrement seulement approché de la surface. La comparaison qualitative des sismogrammes obtenus pour une onde plane S à incidence verticale, avec ceux obtenus par Ohminato & Chouet (1997), qui utilisent une méthode de différences finies en déplacement-contrainte du second ordre, est assez bonne (Figures

2.6 et 2.7), malgré la discrétisation grossière. Ceci s'explique par une onde incidente ayant une longueur d'onde importante (égale au diamètre de la cavité).

- Un dernier test de validation combine les deux difficultés de modélisation rencontrées précédemment: une source explosive isotrope située juste sous la surface d'une colline gaussienne à section circulaire. La longueur d'onde principale de la source vaut  $\lambda_c = 2000$  m, et la colline a une hauteur de 1000 m et une largeur d'environ 2000 m.

La Figure 2.9 montre la discrétisation de la topographie à l'aide d'éléments rectangulaires plans. Pour clarifier la figure, le pas de discrétisation est plus grand que celui utilisé réellement. Les 6 récepteurs et l'emplacement de la source, 100 m sous la surface, sont également représentés. Les résultats que nous obtenons ont pu être comparés à ceux obtenus avec deux méthodes précédemment citées: les Éléments Spectraux de Komatitsch & Vilotte (1998), qui utilisent 5,5 points par plus petite longueur d'onde de Rayleigh, et les Différences Finies de Ohminato & Chouet (1997) qui discrétisent à 18 points par longueur d'onde de Rayleigh minimum (Figure 2.10). L'accord obtenu avec la méthode des Éléments Spectraux est tout à fait remarquable et constitue en lui-même une excellente validation pour les deux méthodes. La méthode de différences finies utilisée par Ohminato & Chouet est relativement grossière, au sens où elle est seulement du deuxième ordre en temps et en espace, et où la surface libre est approximée par une topographie en "marches d'escaliers". Les ondes de surface sont donc certainement mal construites par cette méthode, et ce sont justement sur ces ondes là que les désaccords sont les plus importants, entre cette méthode et les deux autres. Nous pouvons conclure que la méthode d'éléments de frontière utilisée donne des résultats précis pour des structures tridimensionnelles et permet d'implémenter des sources proches de la surface.

Les "mouvements de particules" horizontaux obtenus ont été représentés sur les Figures 1.3 et 1.4. Ces figures montrent la totalité de la surface discrétisée pour la réalisation du calcul. La Figure 1.3 ne montre que les premières arrivées, et les sismogrammes entiers sont représentés sur la Figure 1.4. Un mouvement radial des premières arrivées est observé en tout point de la surface, des modifications de la polarisation ayant lieu pour les arrivées plus tardives. On peut se demander dans quelle mesure la troncature du milieu est responsable de cette modification de la polarisation. En fait, la source étant proche de la surface, la zone de Fresnel, d'où proviennent toutes les contributions cohérentes pour un couple source-récepteur donné, n'a pas une extension très large. Comme  $\lambda_c/4 = 500$  m, la zone de Fresnel comprend tous les "chemins" joignant la source au récepteur, et dont la longueur ne dépasse pas de plus de 500 m celle du chemin direct. La topographie gaussienne



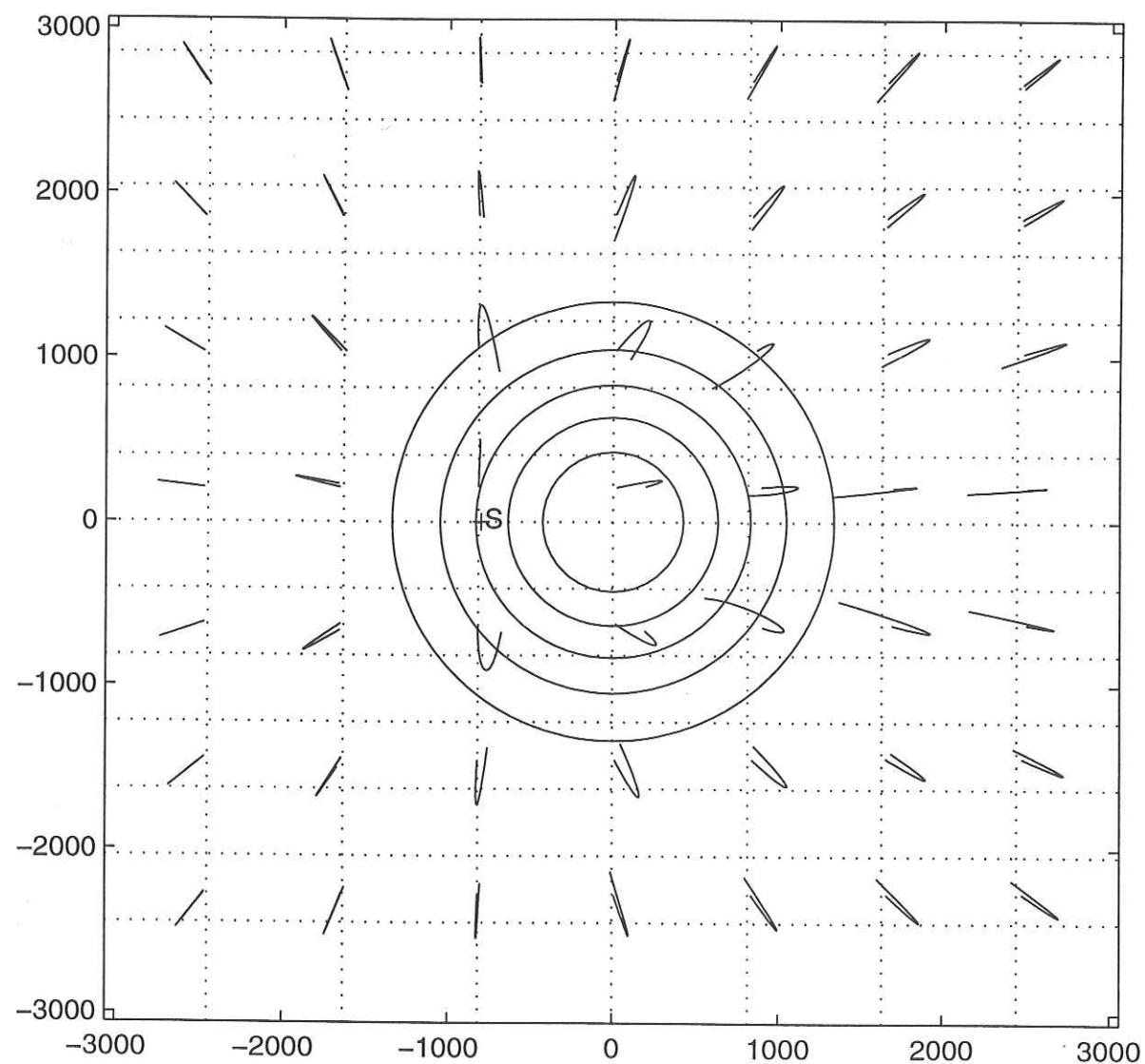


FIG. 1.3 – Mouvements horizontaux, obtenus sur la topographie gaussienne avec explosion en sub-surface. La localisation de la source  $S$  est repérée, ainsi que les lignes de niveau de la topographie (la plus basse correspond à  $z = 170$  m). Seul le début des sismogrammes est représenté (les 30 premiers pas de temps après la première arrivée où  $u > u_{\max}/100$ ). Les sismogrammes sont normalisés par trace.

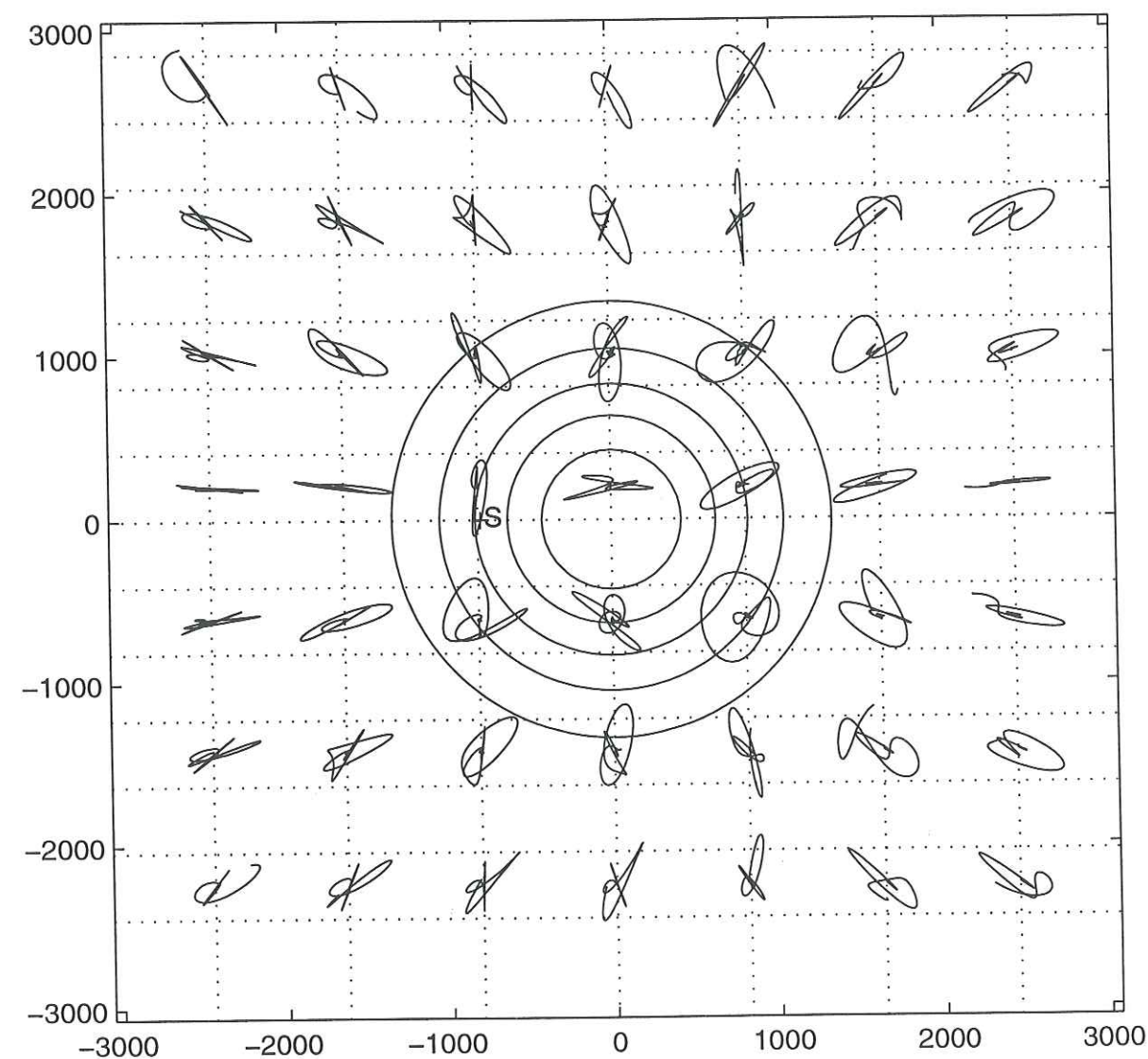


FIG. 1.4 – Mouvements horizontaux, obtenus sur la topographie gaussienne avec explosion en sub-surface. Les lignes de niveau de la topographie ainsi que la localisation de la source  $S$  sont repérés. Les sismogrammes sont représentés en entier.



étant concave sur ses bords et la position de la source donnant une incidence rasante aux bords du modèle, la Figure 1.5 montre que l'extension de la zone de Fresnel ne peut dépasser le récepteur de plus de  $\lambda/8$ , c'est à dire 250 mètres.

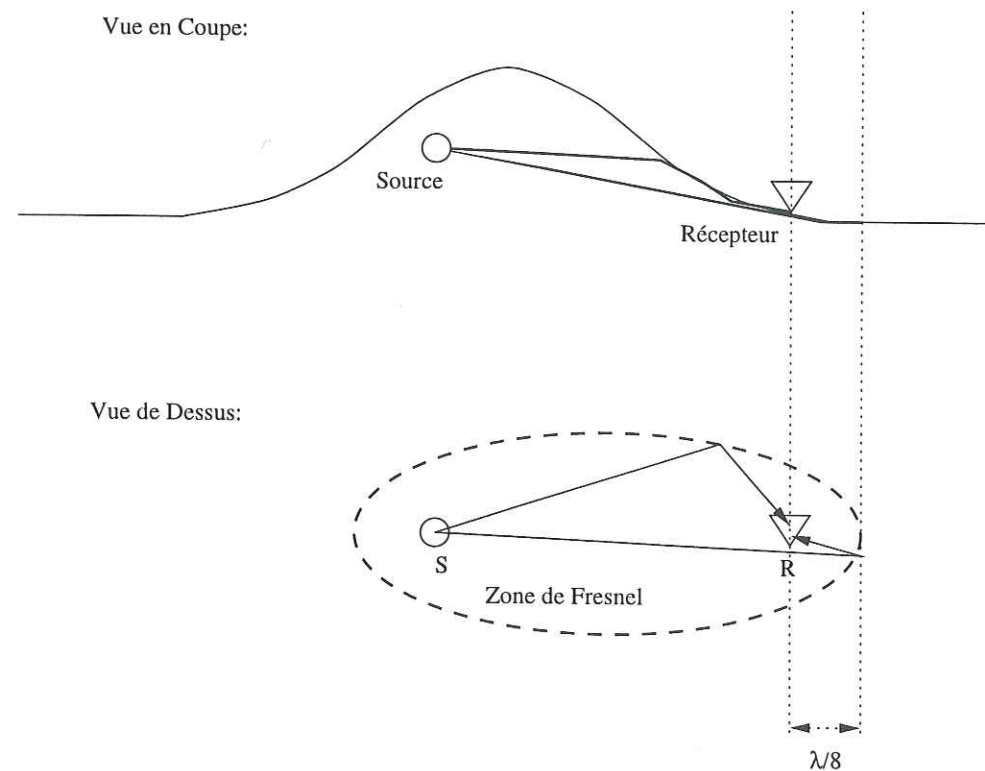


FIG. 1.5 – Zone de Fresnel associée à un couple source-récepteur.

En tenant compte également de la largeur de la zone d'apodisation, qui vaut  $6\Delta x \simeq 400$  m, on peut conclure que seuls les points situés à moins de 650 mètres du bord du modèle peuvent être affectés directement par la troncature de la zone de Fresnel. La modification des polarisations observée est donc bien un effet de topographie, et non pas un artefact dû aux dimensions finies du modèle.

*Remarque:* la fonction source utilisée étant une ondelette de Ricker, le signal conserve de l'énergie jusqu'à environ  $2\lambda_c$ , ce qui étend la zone de Fresnel correspondante en conséquence, mais ne change rien aux conclusions que nous venons de tirer. De plus, la valeur  $\lambda/4$  que nous utilisons dans la définition de cette zone correspond à un déphasage de  $\pi/2$ : le signal provenant des bords de la zone de Fresnel n'est donc pas cohérent, et on a ainsi plutôt tendance à surestimer l'extension de la zone.

## 1.4 Modélisation d'une topographie réelle: le Stromboli

La méthode ayant ainsi été validée, nous avons réalisé un calcul correspondant à une topographie réelle: le volcan Stromboli.

L'intérêt de ce calcul réside dans la modélisation des signaux large bande (1 à 10 s de période) créés dans un édifice volcanique, et de leur interaction avec une topographie de dimension comparable à la longueur d'onde (i.e. quelques kilomètres). De tels signaux large bande ont été observés sur de nombreux volcans, et notamment le Stromboli (Neuberg et al., 1994). Le but de la modélisation est la caractérisation des sources sismiques. Leur nature est en effet mal connue: on observe des événements sismiques dits "volcano-tectoniques", dont le mécanisme est un double-couple classique, mais aussi des signaux dits Longues Périodes et des trémors, dont l'origine est moins bien comprise et qui sont liés aux circulations de fluides dans les conduits reliant les chambres magmatiques (Chouet et al., 1997).

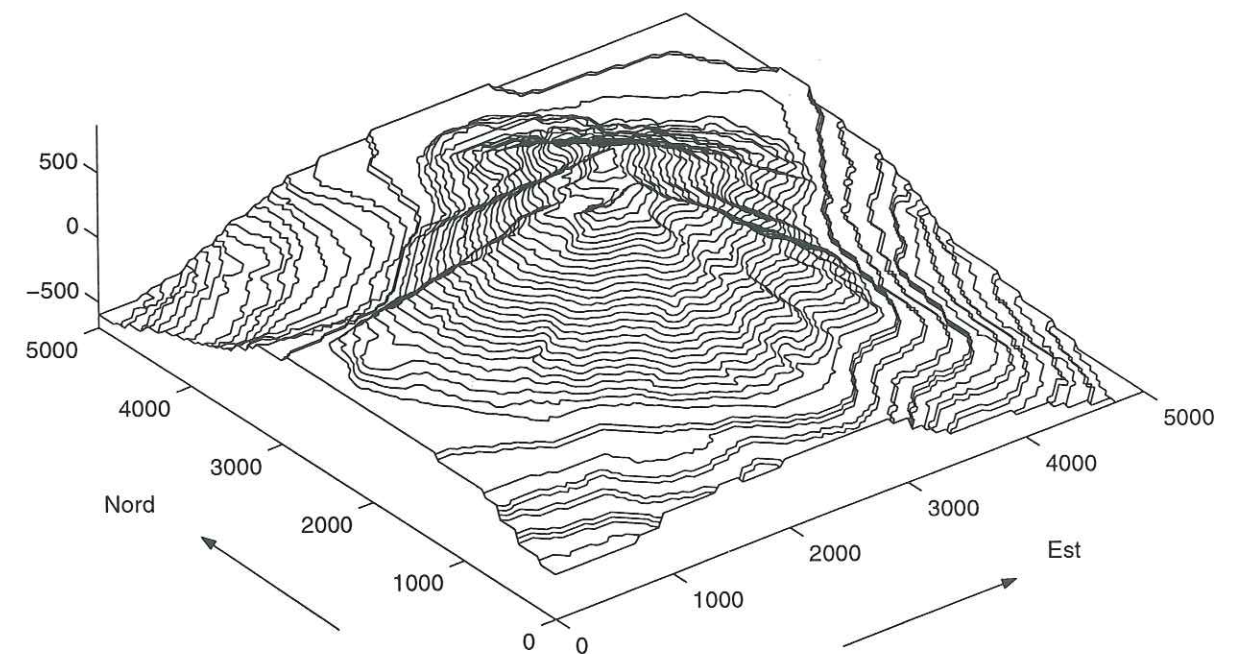


FIG. 1.6 – Modèle de topographie du volcan Stromboli utilisé pour le calcul des sismogrammes synthétiques. Les distances horizontales et verticales sont graduées en mètres. Le sommet culmine à environ 900 mètres d'altitude. (MNT fournit par B. Chouet)

Nous nous intéressons ici exclusivement au problème des effets de topographie, et



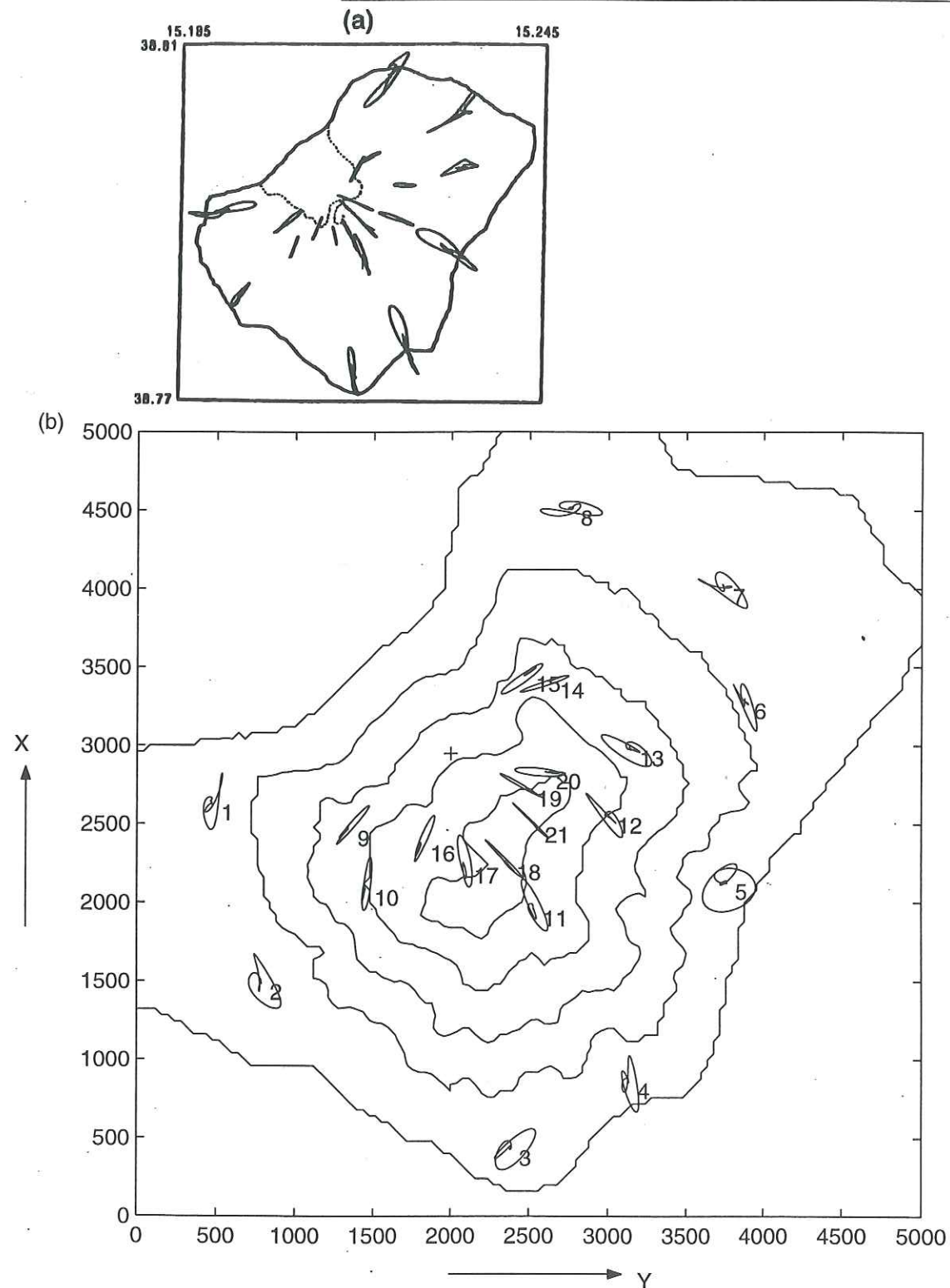


FIG. 1.7 – (a) Vitesses horizontales observées par Chouet et al. (1999) sur le volcan Stromboli. (b) Déplacements horizontaux calculés aux 21 stations. On représente le bord de l'île et les lignes de niveau tous les 200 mètres. La croix repère l'aplomb de la source, située 300 m sous le cratère principal, en direction du Nord-ouest. Les distances sont graduées en mètres.

considérons un milieu homogène. Si l'on dispose d'une méthode de calcul suffisamment rapide et précise, l'inversion simultanée des paramètres de la source (mécanisme et localisation) peut être réalisée. Pour cela il faut être capable de calculer les fonctions de Green correspondant aux 6 composantes du tenseur des moments et à 3 directions de forces ponctuelles, pour des localisations variées de la source.

Nous nous sommes limités ici à effectuer le calcul pour une source explosive isotrope, en considérant comme localisation celle obtenue par la méthode du maximum de semblance (Chouet et al., 1999).

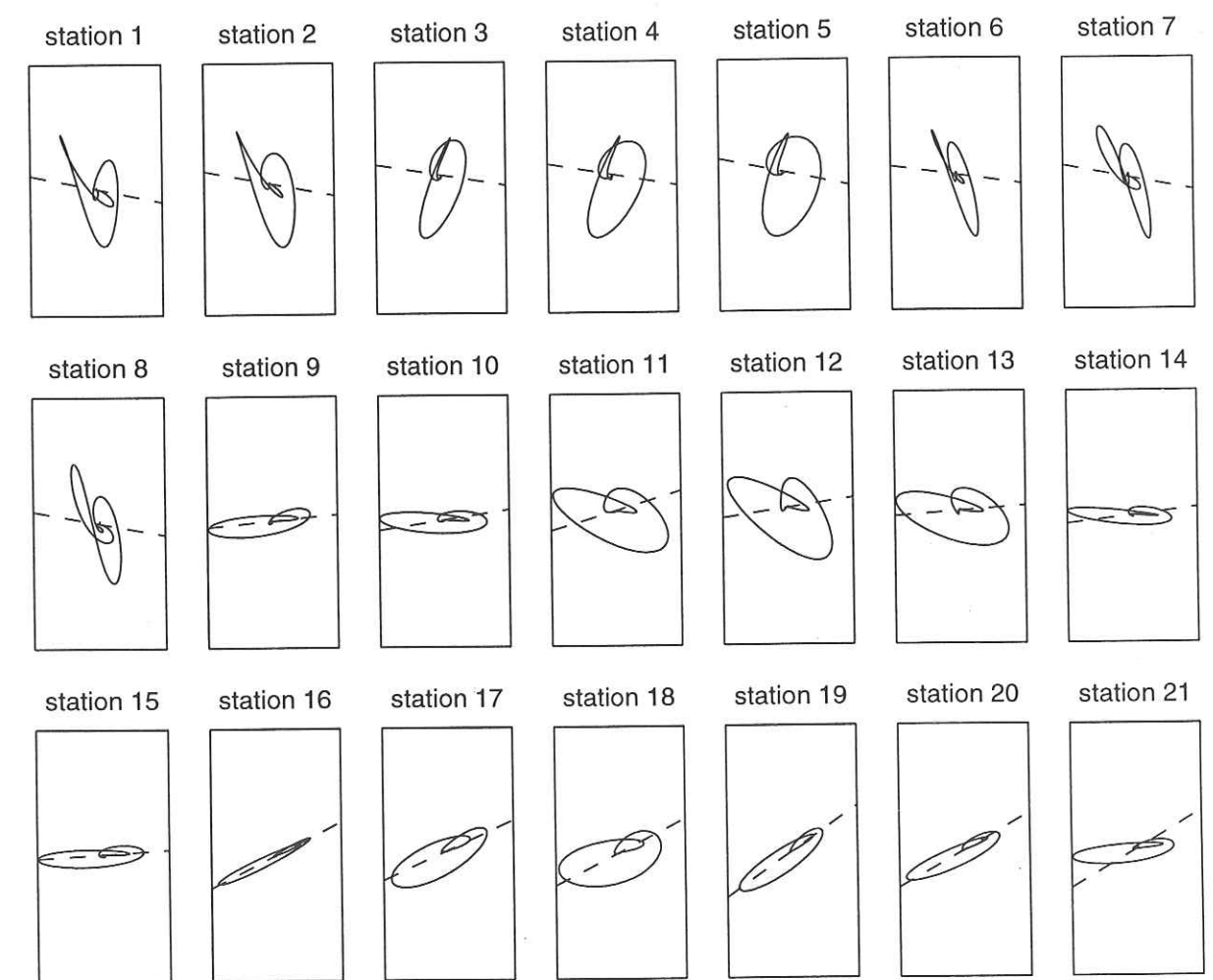


FIG. 1.8 – Déplacements dans le plan azimutal aux 21 stations. En tirets, la direction source-récepteur (la station est toujours située sur la gauche, par rapport au récepteur). Les déplacements sont normalisés par stations.



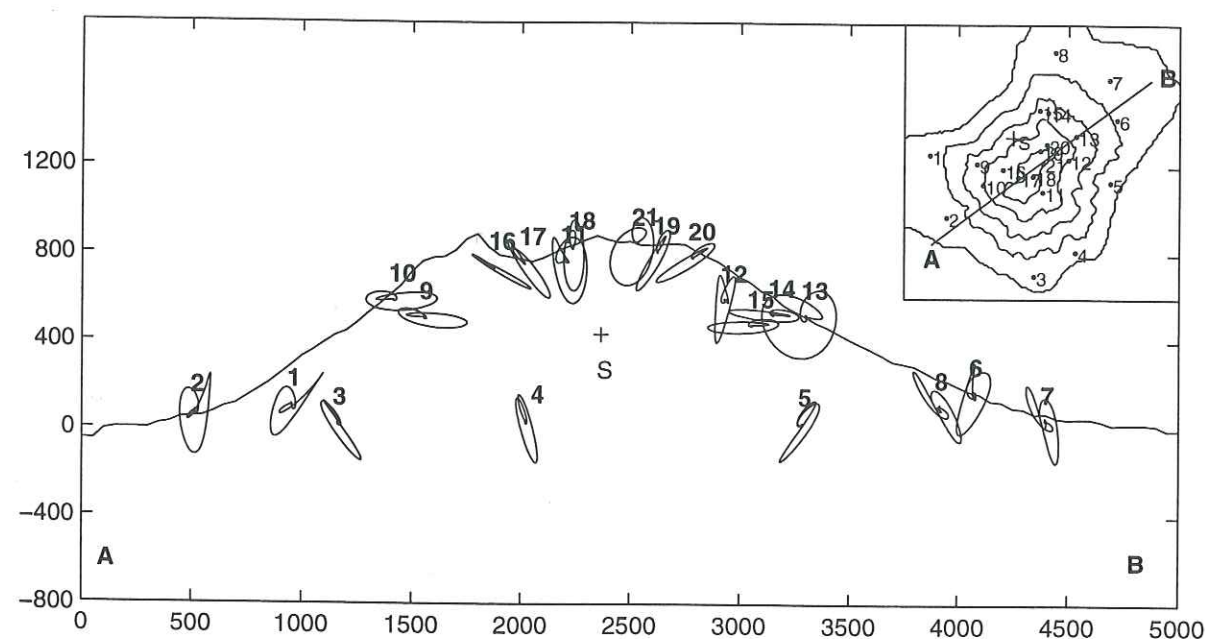


FIG. 1.9 – Déplacements projetés sur le plan vertical AB. Les déplacements sont normalisés par stations.

#### 1.4.1 Les caractéristiques du modèle utilisé

Le modèle de topographie utilisé est représenté sur la Figure 1.6. Le demi espace infini que recouvre la topographie est considéré comme homogène, avec une vitesse des ondes P qui vaut  $\alpha = 3000 \text{ m.s}^{-1}$ , une masse volumique  $\rho = 1200 \text{ kg.m}^{-3}$  et un coefficient de Poisson  $\sigma = 0.25$ , ce qui donne comme vitesse des ondes S:  $\beta = \alpha/\sqrt{3} \simeq 1732 \text{ m.s}^{-1}$ .

La fonction source  $s(t)$  utilisée est un Ricker de période principale  $T_0 = 3 \text{ s}$ :

$$s(t) = M_0 \left( 2 \frac{\pi^2 (t - t_0)^2}{T_0^2} - 1 \right) e^{-\frac{\pi^2 (t - t_0)^2}{T_0^2}}$$

La longueur d'onde minimale que nous devons calculer avec précision vaut:  $\lambda_{\min} = 0.92 \beta \frac{T_0}{2.5} \simeq 1900 \text{ m}$ , ce qui implique comme discrétisation spatiale  $L \simeq 1900/4 = 475 \text{ m}$ . (Remarque: pour de telles longueurs d'onde, de dimensions proches de celle de la topographie, l'hypothèse d'un milieu homogène se justifie à peu près.)

La source est située environ 300 m sous le cratère, à 300 m au nord-ouest, à l'altitude 430 mètres, au point de coordonnées (2948 m, 1999 m) dans le repère que nous utilisons (voir Figure 1.7). La distance orthogonale de la source à la surface est d'environ 150 mètres, ce qui impose déjà de restreindre le pas de discrétisation à environ  $L = 150$

mètres.

Vu le relief très "perturbé" du volcan, avec des pentes importantes par endroits, une discrétisation encore plus fine est en fait nécessaire. Pour conserver un nombre de points de collocation raisonnable, la topographie a été discrétisée sur une grille qui s'étend horizontalement sur un carré de 5 km par 5 km, avec une distance horizontale entre noeuds  $\Delta x = 40$  mètres. Le modèle a donc une taille de  $124 \times 124 = 15376$  points. La normale à la surface devant être connue en tous points, nous utilisons pour l'obtenir une interpolation bicubique par morceaux. La normale ne peut être obtenue ainsi aux bords du modèle, c'est pourquoi nous ne considérons que 124 et non pas 126 points dans chaque direction.

#### 1.4.2 Résultats

La mémoire vive nécessaire pour effectuer le calcul avec  $\Delta x = 40 \text{ m}$  est de 590 Mo, et les 150 pas de temps calculés (avec un incrément  $\Delta t = 60 \text{ ms}$ ) ont nécessité 45 heures sur un IBM Risk 6000/397, dont l'horloge tourne à 170 MHz. Avec une discrétisation moins fine ( $\Delta x = 80 \text{ m}$ ), la mémoire nécessaire est de 59 Mo seulement, et le temps de calcul pour un même pas de temps est ramené à seulement 3 heures.

Les sismogrammes ont été calculés en 21 points, correspondant aux 21 sismomètres large bande, 3 composantes, installés lors d'une expérience menée en septembre-octobre 1997 (Chouet et al., 1999). La Figure 1.7 montre les mouvements horizontaux observés en ces stations, et la Figure 1.8 montre ces déplacements dans le plan azimutal, avec en tirets la direction source-récepteur.

La Figure 1.10 montre que des variations significatives des amplitudes, allant de quelques % à quelques dizaines de %, apparaissent quand la taille de la maille est doublée ( $\Delta x = 80 \text{ m}$  au lieu de 40 m). On n'a donc pas prouvé que la convergence était obtenue, même si ces fluctuations restent relativement faibles sur la plupart des sismogrammes.

Notons que, si une précision modérée est requise, le gain en temps de calcul peut être très significatif: une accélération d'un facteur  $2^4 = 16$  est obtenu en doublant la valeur de  $\Delta x$ .

N'ayant pas d'expérience sur la précision du maillage requise par ce type de modélisation, nous avons utilisé un pas de discrétisation plus petit ( $\Delta x = 30 \text{ m}$ , en conservant  $\Delta t = 60 \text{ ms}$ ) pour réaliser à nouveau le calcul. La taille du modèle restant constante, le nombre de noeuds de la discrétisation est cette fois de  $167 \times 167 = 27889$ , soit presque le double de la discrétisation à  $\Delta x = 40 \text{ m}$ . En fait, les sismogrammes calculés se mettent



alors à diverger, pour certains dès les premières arrivées (Figure 1.11). Aucune conclusion ne peut donc être tirée quand à la précision obtenue sur les résultats obtenus avec la discrétisation  $\Delta x = 40$  m. On constate par contre encore une fois le caractère capricieux des méthodes de résolution en temps. De plus, les perturbations observées ne sont pas du type oscillant habituellement rencontré: sans doute est-ce dû aux longueurs d'onde inhabituellement grandes par rapport à la distance inter-nodale, ou au choix d'un pas de temps non conforme à cette distance.

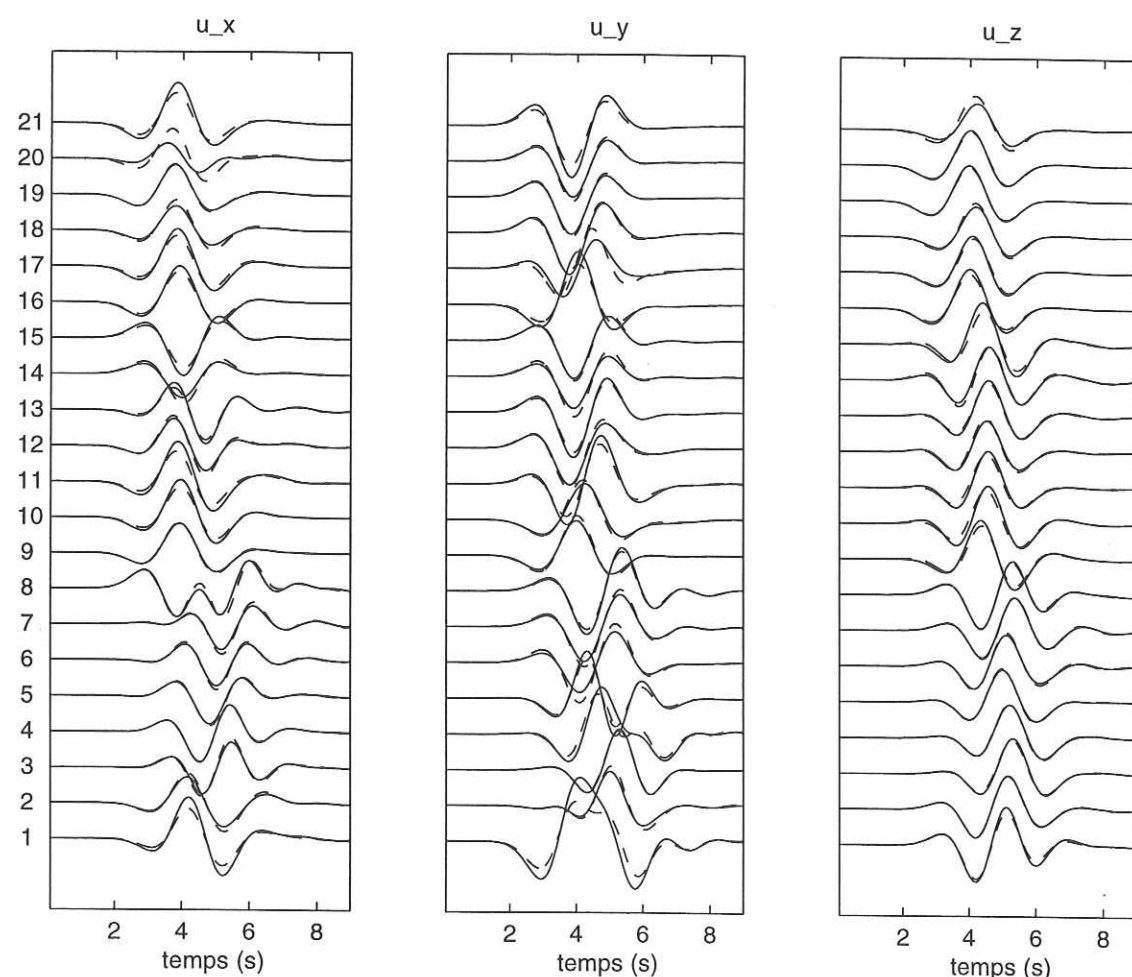


FIG. 1.10 - 3 composantes des sismogrammes obtenus aux stations 1 (bas) à 21 (haut). En trait plein, résultats du calcul effectué avec  $\Delta x = 40$  mètres. En tirets, résultats du calcul effectué avec  $\Delta x = 80$  mètres. Dans les deux cas, le pas de temps est identique et vaut  $\Delta t = 60$  ms. (Les déplacements sont normalisés par stations). La composante  $u_x$  est orientée au Nord,  $u_y$  à l'Est et  $u_z$  vers le bas.

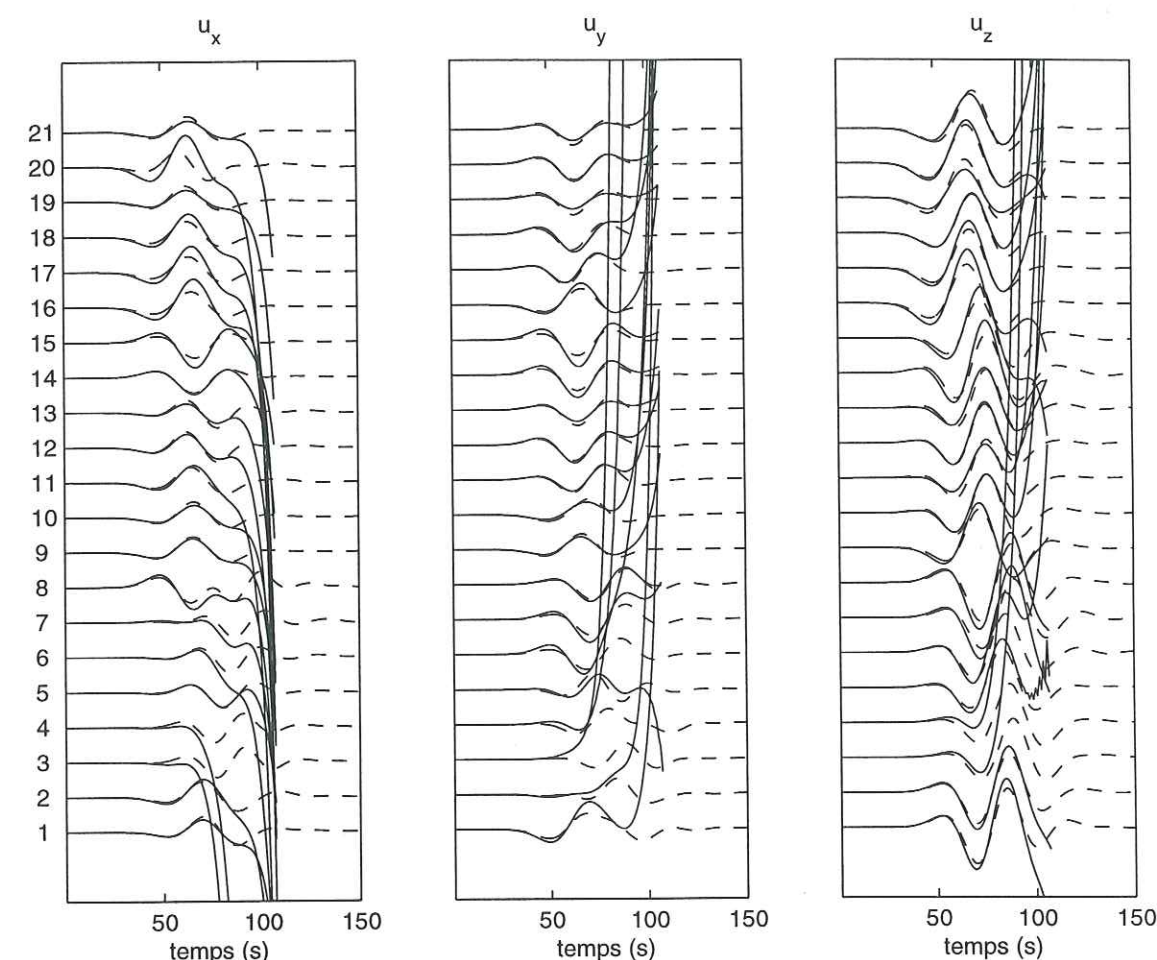


FIG. 1.11 - Résultats divergents, en utilisant un pas de discrétisation  $\Delta x = 30$  m (trait continu), comparés avec la discrétisation  $\Delta x = 40$  m (tirets). Dans les deux cas, le pas de temps est identique et vaut  $\Delta t = 60$  ms.

Sur la Figure 1.12, nous comparons maintenant, pour une discrétisation spatiale donnée ( $\Delta x = 40$  m), les résultats obtenus en choisissant deux pas de temps distincts:  $\Delta t = 60$  ms et  $\Delta t = 15$  ms. Le choix  $\Delta t = 15$  ms correspond à la valeur obtenue par la règle  $\Delta t \simeq L/\alpha$ . On s'aperçoit, comme il a été mentionné plus haut, que cette règle n'a pas lieu d'être respectée ici: aucune différence significative entre les deux résultats n'est constatée, mis à part sur la composante  $x$  de la station 20, et dans une moindre mesure sur la composante verticale des stations 14, 15 et 21. Or, le temps de calcul pour une longueur de sismogramme donnée est, en première approximation, proportionnel au nombre d'itérations, et donc inversement à la valeur de  $\Delta t$ . Le choix d'un pas de temps plus grand que celui donné par la règle  $\Delta t \simeq L/\alpha$ , permet donc dans le cas présent de gagner au moins un facteur quatre sur le temps de calcul.



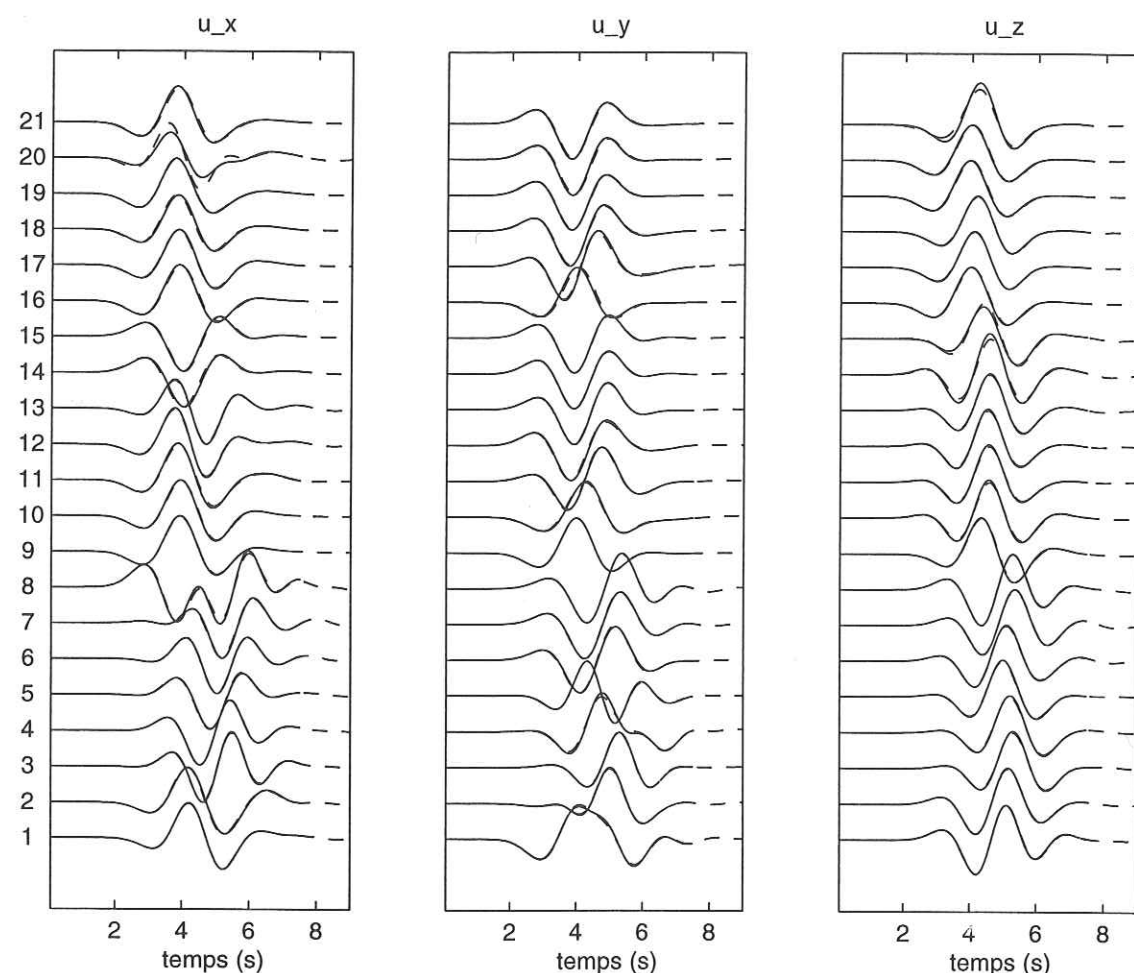


FIG. 1.12 – 3 composantes des sismogrammes obtenus aux stations 1 (bas) à 21 (haut). En trait plein, résultats du calcul effectué avec  $\Delta t = 15$  ms. En tirets, résultats du calcul effectué avec  $\Delta t = 60$  ms. Dans les deux cas, le pas en espace est identique et vaut  $\Delta x = 40$  m. (Les déplacements sont normalisés par stations)

Il n'est pas facile de donner une valeur théorique maximale pour le choix de  $\Delta t$ . Nous observons ici que, en prenant un pas de temps  $\Delta t = 120$  ms (et toujours  $\Delta x = 40$  m), le résultat commence à se dégrader, mais sans que cela soit catastrophique (Figure 1.13). Le temps de calcul est alors de 18h15 (pour une longueur de sismogramme identique, soit 75 pas de temps). En fin de compte, un résultat ayant une précision moyenne, mais qui reste raisonnable, peut être obtenu avec un temps de calcul réduit (de l'ordre de 1h30), en utilisant les paramètres de discrétisation suivants:  $\Delta t = 120$  ms et  $\Delta x = 80$  m.

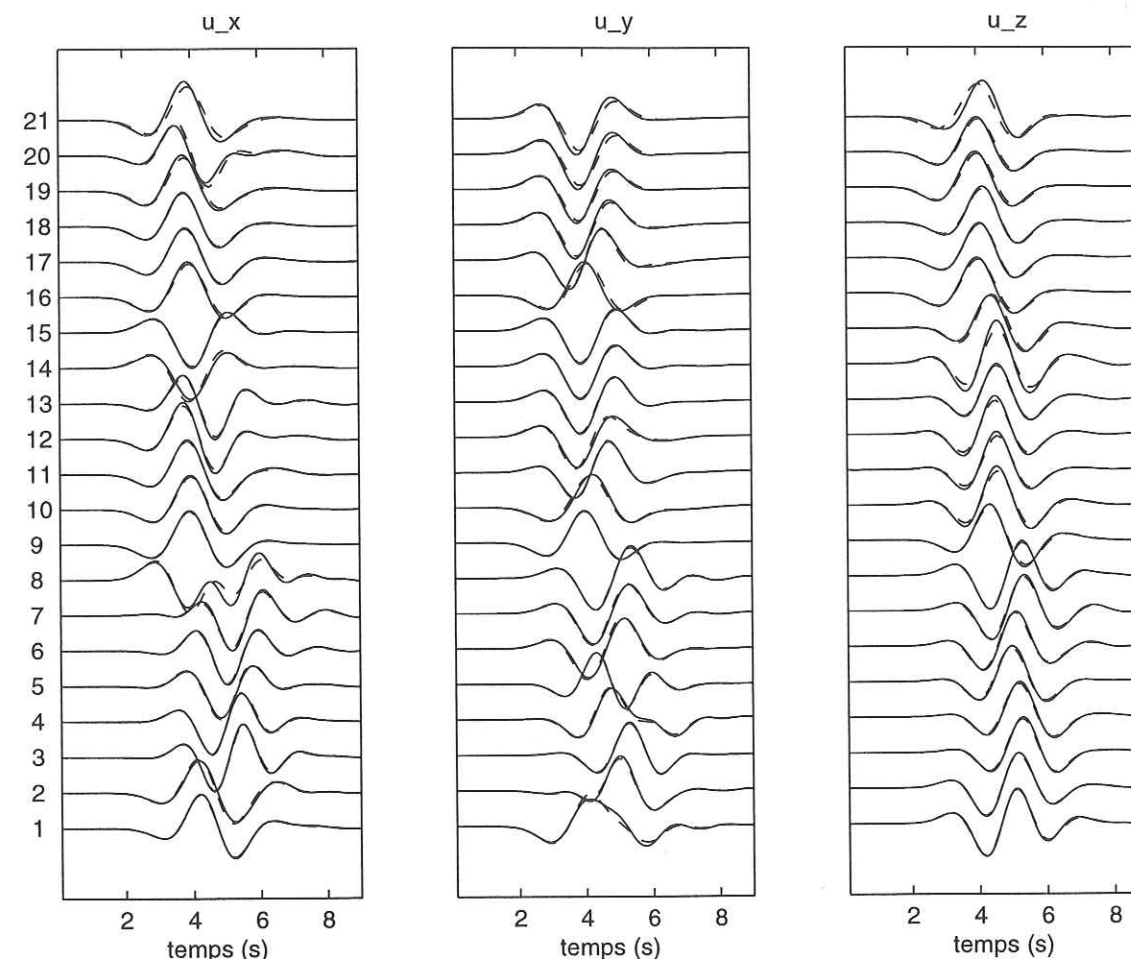


FIG. 1.13 – En traits pleins, résultats du calcul effectué avec  $\Delta t = 60$  ms. En tirets, résultats du calcul effectué avec  $\Delta t = 120$  ms. Dans les deux cas, le pas en espace est identique et vaut  $\Delta x = 40$  m.

### Interprétation des résultats

Revenons maintenant aux "mouvements de particules" représentés sur les Figures 1.7 et 1.8. Une représentation des mouvements sismiques projetés sur un plan vertical recoupant la topographie du Sud-ouest au Nord-est est également fournie sur la Figure 1.9. Des effets importants de déviation du mouvement par rapport à la direction source-récepteur sont observés, notamment sur les flancs du volcan, où le déplacement soit a une polarisation qui n'est plus linéaire, soit est polarisé suivant une direction quasiment orthogonale à la direction de propagation directe. On remarque également, sur des points plus proches de la source, situés là où la topographie est la plus tourmentée, que bien que les mouvements restent à peu près linéaires, ils ne sont pas tous exactement radiaux.



L'analyse des données réelles obtenues par Chouet et al. (1999) montrait des polarisations beaucoup plus linéaires du signal (pour des fréquences filtrées entre 2 et 50 s), que celles que nous observons sur les synthétiques (voir Figure 1.7). Cela leur permettait de localiser la source assez précisément. Il semble qu'une aussi bonne relocalisation de la source ne soit pas possible avec les données synthétiques que nous avons obtenues pour un modèle homogène. Cela est d'autant plus étonnant que la source que nous utilisons est parfaitement isotrope, ce qui n'est certainement pas le cas de la source réelle.

Bien sûr, la réflexion par une surface libre introduit en elle même une modification de la polarisation. Cependant, dans le cas d'une onde plane P incidente sur une surface libre plane, la polarisation reste contenue dans le plan d'incidence. Nous définissons ici le plan d'incidence comme le plan contenant la ligne source-récepteur (ou plus généralement la tangente au rai incident) et la normale à la surface libre. Ce plan n'est pas forcément vertical: il n'est donc a priori pas confondu avec le plan azimutal, défini comme le plan vertical contenant la source et le récepteur. Il est donc naturel que les mouvements de particules ne soient pas contenus dans le plan azimutal, même pour une source explosive isotrope en milieu homogène. L'effet mentionné ci-dessus pourrait suffire à expliquer l'observation de "mouvements de particules" non radiaux sur une projection horizontale (Figure 1.7). Mais comme nous sommes en champ proche, l'approximation onde plane n'est pas valable. De plus, les longueurs d'ondes importantes que nous considérons ( $\lambda = \alpha T_0 = 9$  km) ne permettent pas l'approximation de surface libre plane. Néanmoins, ce type d'effet permet de comprendre qu'une source explosive isotrope peut conduire effectivement à des mouvements de particules qui ne sont pas dans le plan azimutal.

Les longueurs d'ondes du signal modélisé étant assez importantes par rapport à la taille du modèle, il convient d'examiner, comme pour le cas de la topographie gaussienne, quels sont les points pour lesquels l'effet de troncature de la zone de Fresnel est à prendre en compte. En utilisant le même raisonnement que précédemment, et comme  $\lambda_c = 9$  km, on peut considérer en première approximation (car la topographie n'est pas partout concave sur ses bords) que l'effet de troncature de la zone de Fresnel peut être significatif pour les points qui se trouvent à une distance des bords du modèle inférieure à  $\lambda/8 + 6\Delta x \simeq 1350$  m, ce qui concerne les récepteurs 1 à 8, situés au pied du volcan, et pour lesquels la polarisation observée est la moins linéaire.

Pour examiner la réalité de cet effet de troncature, nous avons effectué le même calcul que précédemment (même source explosive, même milieu, même discrétisation  $\Delta x = 40$  m,  $\Delta t = 60$  ms), mais en étendant le modèle de topographie à l'Ouest et en rognant son côté Est: la taille du domaine modélisé est conservée, mais nous l'avons décalé de  $36 * \Delta x = 1440$  m vers l'Ouest. Sur la Figure 1.14, à comparer avec la figure 1.7, on ne

constate que très peu de différences significatives entre les deux choix de la zone discrétisée: les stations 1 et 2, dont la zone de Fresnel (telle que nous l'avons défini) était tronquée, ont des figures de déplacement légèrement modifiées, alors que les stations situées sur le bord Est (et notamment les stations 12 et 13) ne sont que très peu affectées par la troncature de cette zone. On peut donc conclure que l'effet de troncature de la zone de Fresnel est négligeable dans les calculs que nous avons effectués.

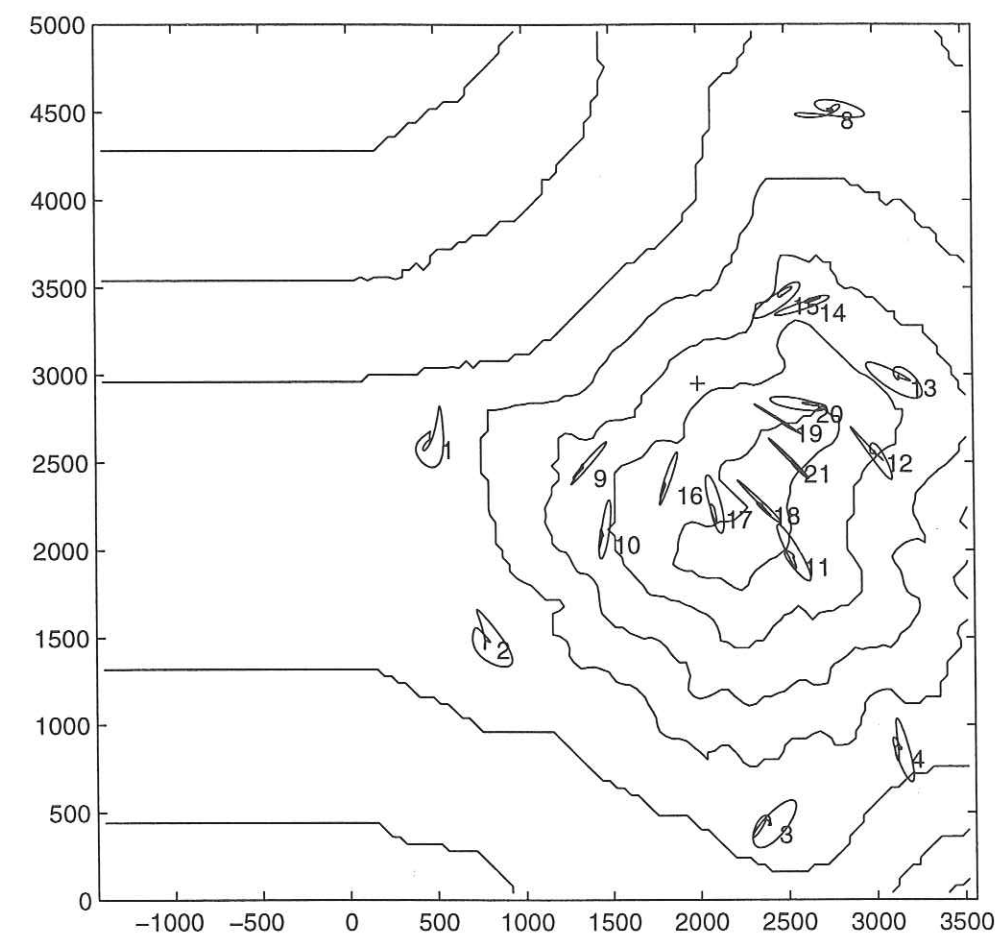


FIG. 1.14 – Déplacements horizontaux calculés avec un modèle de topographie étendu à l'Ouest (où on lui donne une configuration 2D) et raccourci à l'Est, pour analyser les effets de troncature de la zone de Fresnel. Tous les autres paramètres sont identiques à ceux utilisés pour la figure 1.7.

### 1.4.3 Effets de la source

Les polarisations calculées aux 21 stations ne correspondant pas à celles observées sur le terrain par Chouet et al. (1999), nous avons testé l'influence du choix de la source sur



les polarisations obtenues. Des calculs ont donc été effectués pour un même modèle, mais en modifiant dans un premier temps le mécanisme de la source et dans un deuxième temps sa localisation en profondeur.

La modélisation réalisée en conservant la localisation initiale de la source, mais avec un mécanisme au foyer différent, correspond à l'ouverture d'une faille verticale orientée Nord-Sud, qui se rapproche sans doute plus de ce qui se passe effectivement au niveau de la source (B. Chouet, communication personnelle). Le tenseur des moments  $M_{ij}$  utilisé a une seule composante non nulle:  $M_{yy}$ . Les paramètres de discrétisation sont inchangés:  $\Delta x = 40$  m et  $\Delta t = 60$  ms. On observe (Figure 1.15) des polarisations nettement différentes du cas explosif, mais on s'éloigne d'une polarisation linéaire. Un choix plus pertinent du mécanisme au foyer pourrait sans doute être fait pour mieux coller aux observations, en utilisant une méthode d'inversion.

Dans le deuxième test, la modification de la profondeur de la source induit une polarisation beaucoup plus rectiligne et mieux orientée vers cette source, comme on peut le constater sur la Figure 1.16, où la source a simplement été abaissée à l'altitude  $z = 0$ . Cela nous laisse penser que la localisation que nous avons utilisé n'est peut être pas tout à fait correcte, et que l'erreur sur la localisation (et notamment sur la profondeur de la source) est peut-être plus importante que celle sur le mécanisme.

*Remarque:* cette dernière modélisation a été réalisée avec les paramètres  $\Delta x = 40$  m et  $\Delta t = 120$  ms. Ce choix du pas de temps ne modifie pas la polarisation: la vérification a pu être faite à l'aide des résultats de la figure 1.13.

Les effets de la topographie sur la polarisation des sismogrammes observés peuvent également être à l'origine d'une mauvaise localisation de la source dans le plan horizontal. En effet, en modifiant la position de la source explosive utilisée, de manière à la rapprocher du sommet du Stromboli (position sous le cratère, Figure 1.17), on observe que toutes les stations ne pointent pas vers la source. La polarisation des stations 9, 10, 14 et 15, notamment, qui sont situées au bord du fossé du Sciara del Fuoco, semble être déterminée plus par un effet de topographie que par la localisation précise de la source (comparez avec la Figure 1.7).

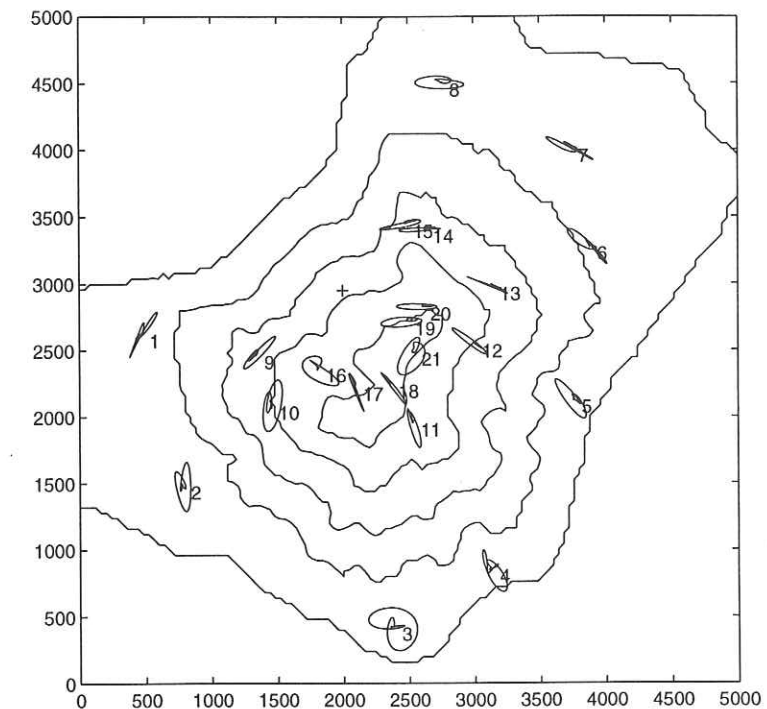


FIG. 1.15 – Déplacements horizontaux calculés aux 21 stations. La position de la source est la même que sur la Figure 1.7 (b), mais le mécanisme de la source a été modifié: il traduit l'ouverture d'une faille verticale orientée Nord-Sud (le tenseur des moments  $M_{ij}$  a une seule composante non nulle:  $M_{yy}$ ).

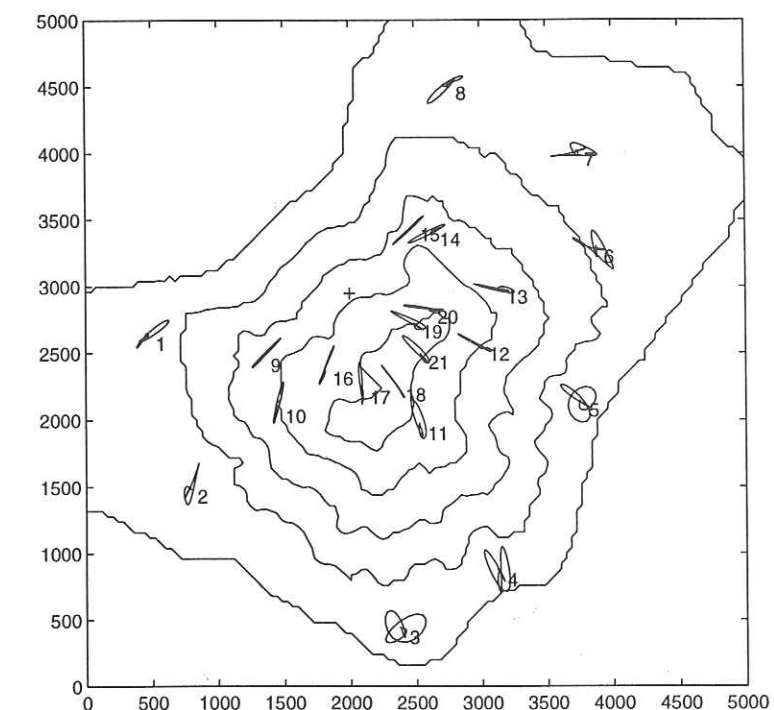


FIG. 1.16 – Déplacements horizontaux calculés aux 21 stations. La source (une explosion isotrope) a été déplacée: sur cette simulation, la source est à l'altitude  $z = 0$  m (au lieu de  $z = 439$  m).



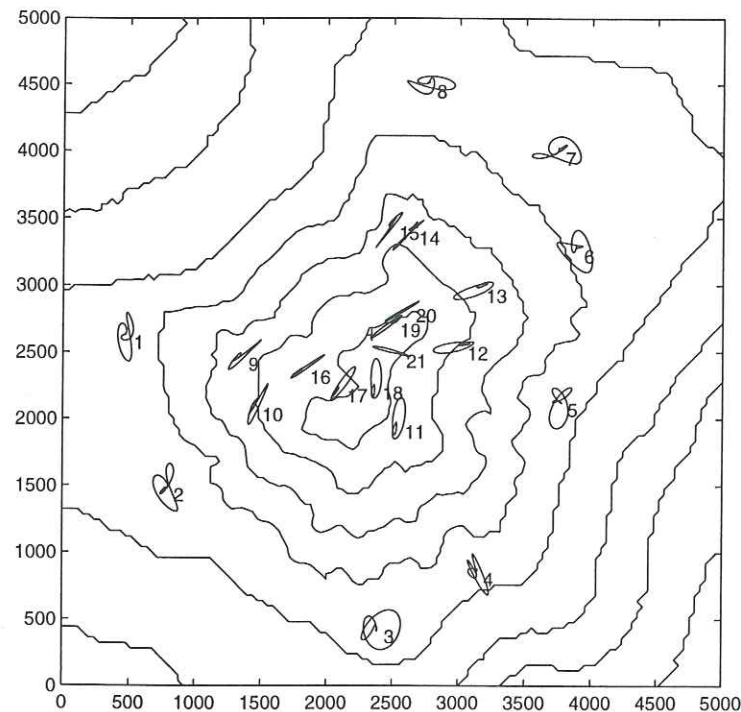


FIG. 1.17 – Déplacements horizontaux calculés aux 21 stations. La position de la source est indiquée par la croix: elle correspond à peu près à l'aplomb du cratère (coordonnées  $x=2626.4$  m,  $y=2337.4$  m), et est située à l'altitude  $z=600$  m. Le mécanisme est une explosion. Paramètres utilisés pour la modélisation:  $\Delta x = 40$  m et  $\Delta t = 60$  ms.

## 1.5 Intérêt et limitations de l'implémentation temporelle

La modélisation de la diffraction des ondes élastiques par une topographie tridimensionnelle à l'aide d'une méthode d'éléments de frontière en temps, telle que nous l'avons développée, donne des résultats d'une très bonne précision: la comparaison avec d'autres méthodes numériques est excellente. De plus la source considérée peut être quelconque: une source ponctuelle, même proche de la surface, est traitée correctement. Néanmoins, certaines caractéristiques de cette méthode limitent ses domaines d'application possibles.

Premièrement, du bruit numérique est susceptible d'apparaître, et peut, au bout d'un certain temps, devenir prépondérant dans les sismogrammes calculés. En fait, ce phénomène apparaît systématiquement: l'amplitude du bruit croît de façon exponentielle, si bien qu'il finit par dominer complètement le signal, au bout d'un temps qui peut être plus ou moins long et que nous ne maîtrisons pas. Néanmoins, comme il a été vu plus haut, on peut reporter l'apparition de ce bruit suffisamment loin dans le sismogramme pour qu'il

ne soit pas perturbateur.

Deuxièmement, cette méthode ne permet pas de traiter des modèles de taille importante: typiquement, nous devons nous restreindre à une largeur de l'ordre de 30 fois la longueur d'onde minimale des ondes diffractées, ou moins, en fonction de la rugosité de la topographie. Cette restriction n'est pas dictée par un problème de précision, mais est due au temps de calcul, qui croît avec la taille du modèle comme  $N^4$ , et devient très vite prohibitif. Le modèle le plus grand pour lequel un calcul a été réalisé est celui du Stromboli, et comportait  $124 * 124 = 15376$  points.

Enfin, le milieu sous-jacent à la topographie doit être homogène, faute de connaître les fonctions de Green pour des milieux plus complexes. La prise en compte de plusieurs sous-domaines homogènes permettrait de remédier en partie à cette limitation, mais serait beaucoup trop coûteuse en temps de calcul, car de nombreuses interfaces seraient à modéliser. Nous avons donc testé des expressions analytiques approchées pour les fonctions de Green des milieux hétérogènes à gradient de vitesse constant, en reprenant une idée de F. Sánchez-Sesma (Sánchez-Sesma et al., 1999). Cette idée, développée au chapitre 3, repose sur une extension de la solution analytique du tracé de rai dans de tels milieux en s'inspirant de la forme du champ complet en milieu homogène.

En fin de compte, l'intérêt principal des méthodes intégrales réside dans leur précision et dans leur capacité à prendre en compte les surfaces libres de manière simple et naturelle. Ces caractéristiques les rendent intéressantes dans l'optique d'un couplage avec des méthodes de différences finies, pour lesquelles les problèmes de surface libre sont un des principaux facteurs limitant la précision. Une étude dans ce sens a été démarrée récemment et est exposée au chapitre 4. Nous y exposons nos premiers résultats concernant le développement d'un schéma de différences finies optimisé, en fréquence, et la façon dont le couplage avec les éléments de frontière doit s'effectuer.



## Annexe 1.A: Algorithme de résolution

Le code utilisant la méthode des éléments de frontière en temps dans sa formulation directe est basé sur l'évaluation numérique de l'intégrale présente dans l'équation 1.15 écrite aux points de collocation  $\mathbf{x}_l$  de la surface libre:

$$\frac{1}{2}u_i(\mathbf{x}_l, t_m) = U_i^{inc}(\mathbf{x}_l, t_m) + \oint_{\partial\Omega} dS \int_0^{m\Delta t} \Sigma_{jik}(\mathbf{x}_l, t_m, \xi, \tau) u_j(\xi, \tau) n_k(\xi) d\tau \quad (1.25)$$

L'algorithme de résolution s'écrit alors comme suit:

Pour chaque pas de temps  $t_m$  ( $m=1..M$ )

{  
Pour chaque point "récepteur"  $\mathbf{x}_l$  ( $l=1..N$ )

{  
Pour chaque élément "émetteur" centré sur  $\mathbf{x}_n$  ( $n=1..N$ )

{  
Pour chaque point de Gauss  $\mathbf{y}_{np}$  de l'élément  $n$  ( $p=1..N_G(n)$ )

{  
Convolution en temps:  
$$I_{np} = \int_{t_m-r/\beta}^{t_m-r/\alpha} \Sigma(\mathbf{x}_l, t_m, \mathbf{y}_{np}, \tau) \cdot u_j(\mathbf{y}_{np}, \tau) d\tau$$
  
}

Intégration en espace sur l'élément  $n$ , par quadrature Gaussienne:

$$J_n = \sum_p a_p I_{np}$$

}

Sommation sur tous les éléments de surface:

$$u(\mathbf{x}_l, t_m) = 2 * (U^{inc}(\mathbf{x}_l, t_m) + \sum_n J_n)$$

}

}

## Evaluation des intégrales temporelles:

En examinant la forme de la fonction de Green en contrainte  $\Sigma$  (équation 1.4), on note que la convolution en temps nécessite l'évaluation des termes suivants:

$$I_{1a}(\xi, t_m) = \int_0^{t_m} \delta(t_m - \tau - r/\alpha) u(\xi, \tau) d\tau = u(\xi, t_m - r/\alpha) \quad (1.26)$$

$$I_{1b}(\xi, t_m) = \int_0^{t_m} \delta(t_m - \tau - r/\beta) u(\xi, \tau) d\tau = u(\xi, t_m - r/\beta) \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned} I_2(\xi, t_m) &= \int_0^{t_m} \left[ \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau' \delta(t_m - \tau - \tau') d\tau' \right] u(\xi, \tau) d\tau \\ &= \int_{t_m-r/\beta}^{t_m-r/\alpha} [t_m - \tau] u(\xi, \tau) d\tau \end{aligned} \quad (1.28)$$

$$I_{3a}(\xi, t_m) = \int_0^{t_m} \dot{\delta}(t_m - \tau - r/\alpha) u(\xi, \tau) d\tau = \dot{u}(\xi, t_m - r/\alpha) \quad (1.29)$$

$$I_{3b}(\xi, t_m) = \int_0^{t_m} \dot{\delta}(t_m - \tau - r/\beta) u(\xi, \tau) d\tau = \dot{u}(\xi, t_m - r/\beta) \quad (1.30)$$

Les termes  $I_{1a}$  et  $I_{1b}$  sont évalués à l'aide d'une simple interpolation linéaire. Les termes  $I_{3a}$  et  $I_{3b}$  (dérivées temporelles) sont obtenus par interpolation linéaire sur les valeurs calculées par différences centrées (voir section 1.2.2).

Le terme  $I_2$ , lui, est obtenu analytiquement, en effectuant l'intégration pour un déplacement  $u$  linéaire par morceaux.

L'évaluation de ces différents termes nécessitant l'utilisation de la valeur de  $u(t_m)$ , celle-ci est obtenue par extrapolation, en posant  $u(t_m) = u(t_{m-1})$  (schéma du type prédicteur-correcteur).



### Intégration spatiale numérique:

L'intégration spatiale, quand à elle, est réalisée par quadrature Gaussienne sur des éléments rectangulaires plans (Figure 1.18) à l'aide de la formule suivante (pour 16 points d'intégration)

$$\int_{rectangle} f(\mathbf{x}) dS = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 a_i a_j f(\mathbf{x}_{ij}) \quad (1.31)$$

où  $a_1 = a_4 = 0.173927$  et  $a_2 = a_3 = 0.326072$ ,

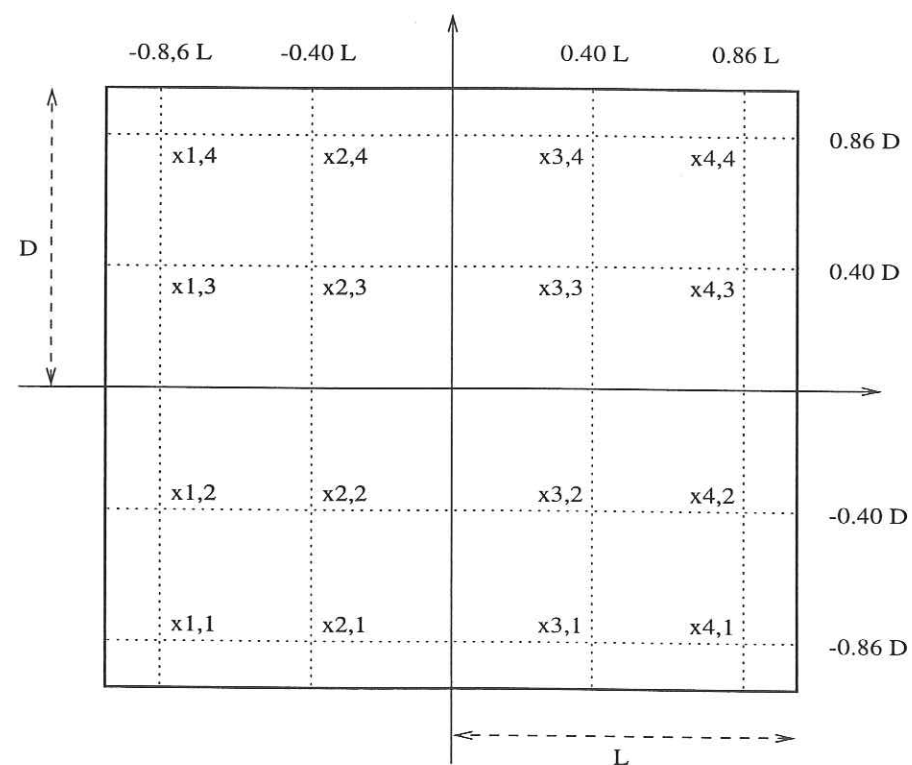


FIG. 1.18 – Répartition des points d'intégration sur un élément rectangulaire plan.

## Chapitre 2

### Seismic Response of 3D Topographies, using a Time-Domain Boundary Element Method

François Janod & Olivier Coutant

Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique,

Université Joseph Fourier,

BP 53X, 38041 Grenoble Cedex, France Manuscript accepté par

Geophysical Journal International



## Résumé

Nous présentons une implémentation en temps d'une Méthode d'Eléments de Frontière pour le calcul des ondes diffractées par des topographies tridimensionnelles recouvrant un demi-espace homogène. Cette implémentation est choisie de façon à surmonter les problèmes de mémoire soulevés par la résolution des conditions aux limites dans le domaine fréquentiel. La formulation est flexible et permet d'utiliser les propriétés de translation en temps des fonctions de Green. Le schéma de résolution des conditions limites peut ainsi être choisi comme un compromis entre les besoins en mémoire et en temps de calcul. Nous explorons ici une méthode de résolution explicite qui réclame peu de mémoire mais beaucoup de temps de calcul, de façon à pouvoir être utilisée sur une station de travail. Nous obtenons des résultats satisfaisants avec une discrétisation à quatre points par longueur d'onde minimale, pour différentes topographies et différentes ondes planes incidentes. Cette formulation peut être utilisée avec deux objectifs: l'approche en temps permet une meilleure intégration des méthodes d'éléments de frontière dans les méthodes hybrides (par exemple couplage avec des Différences Finies). Elle permet également de faire des calculs pour des modèles simples avec des moyens informatiques raisonnables. Nous montrons les résultats obtenus pour différents modèles homogènes: explosion sous une surface libre plane, ondes planes à incidence verticale sur une colline Gaussienne et sur une cavité hémisphérique, et explosion sous une colline Gaussienne. Les résultats sont comparés avec ceux d'autres méthodes numériques, comme les Différences Finies et les Eléments Spectraux.

## Abstract

We present a time domain implementation for a Boundary Element Method (BEM) to compute the diffraction of seismic waves by 3D topographies overlying a homogeneous half-space. This implementation is chosen to overcome the memory limitations arising when solving the boundary conditions with a frequency domain approach. This formulation is flexible because it allows to make an adaptive use of the Green's function time translation properties: the boundary conditions solving scheme can be chosen as a trade-off between memory and cpu requirements. We explore here an explicit method of solution that requires little memory but a high cpu cost in order to run on a workstation computer. We obtain good results with four points per minimum wavelength discretization for various topographies and plane wave excitations. This implementation can be used with two aims: the time domain approach allows an easier implementation of BEM in hybrid methods (e.g. coupling with Finite Differences). It also allows to run simple BEM models

with reasonable computer requirements. In order to keep reasonable computation times, we did not introduce any interface and only consider homogeneous models. Results are shown for different configurations: an explosion near a flat free surface, a plane wave vertically incident on a Gaussian hill and on a hemispherical cavity, and an explosion point below the surface of a Gaussian hill. Comparison is made with other numerical methods, such as Finite Differences Methods (FDM) and Spectral Elements.

## 2.1 Introduction

Important site-effects can be observed in the vicinity of local topographies, and large amplifications have been reported at the top of small hills (e.g. Geli et al., 1988; Bouchon & Barker, 1996). In order to fully understand the main features of amplification and to predict the places where the strongest ground motions are expected, we need a method capable of computing the response of such topographies in 3D, with a reasonable computation time. Such computations have already been done with supercomputers for 3D models: FD method by Olsen et al. (1995) and by Ohminato & Chouet (1997), Finite Element Method (FEM) by Bielak et al. (1998), Spectral Element Method (SEM) by Faccioli et al. (1997) and Komatitsch & Vilotte (1998), Indirect BEM in frequency by Bouchon et al. (1996).

The localization and characterization of seismic sources inside complex 3D structures such as volcanos (Ohminato & Chouet, 1997) is also an interesting field of application for this method.

Boundary Element Methods are well adapted to compute the response of a topographical feature because they require only the discretization of the surface itself. Assuming a simple medium (e.g. homogeneous), the Green's functions are known analytically, and approximations are made only at the edges, so the boundary conditions at infinite depth are automatically satisfied.

However, the advantage of dimensionality reduction is counter-balanced by the global character of the equations to be solved. This means that each integral equation involves all terms of the discretized fields, whereas only the field values of nearby points are involved in the equations solved in volume methods (Finite Differences, Finite Elements). Moreover, BEMs can only deal with homogeneous layers.

BEM have already been successfully used to solve 2D topographies problems in the frequency domain, for 2D waves (Gaffet and Bouchon, 1989; Bouchon & Coutant, 1994)



as well as for 3D waves (2.5D problem, Pedersen & al., 1996). This frequency domain approach has already been used for 3D models (Bouchon et al., 1996; Luzón et al., 1997; Yokoi & Sánchez-Sesma, 1998). However, this approach is limited in 3D by the memory size requirements, due to the implicit form of the solution where a large linear system has to be inverted. To overcome this difficulty, Bouchon et al. (1995) use a amplitude threshold to reduce the size of the system, but this introduces artifacts. On the contrary, the time-domain approach can lead to an explicit formulation that is solved by time-stepping, without any linear system inversion.

Time-domain BEM have been implemented by various authors: Cole & al. (1978) investigated the anti-plane strain problem in a two-dimensional model of two welded half spaces while Rice & Sada (1984) treated the case of a buried stress-free cavity in a semi infinite domain (2D problem). Ahmad & Banerjee (1988) used a time-domain BEM to solve the stress-free cavity problem in 3D for an infinite domain: they used quadratic spatial interpolation and linear time interpolation. Takemiya and Fujiwara (1994) used a direct time domain BEM to compute the diffractions of SH waves by 2D canyons and alluvial basins. Thanks to the geometrical simplicity of the problem and the rough interpolation functions used (piecewise constant), they were able to perform integrations analytically, both in time and space. However, their time-stepping scheme requires the solution of a linear system, which is not realistic for a 3D problem.

In the first part of this paper, Boundary Integral Equations for elastodynamics are summarized both in the direct and in the indirect form. In the second part, the time and space discretization process are developed, and the numerical problems of implementation of the method are addressed. Last section shows the comparison between the results given by the BE method and other methods (Discrete Wavenumber, Spectral Elements) for the diffraction of elastic waves by different topographies (plane free surface, Gaussian hill, hemispherical cavity).

## 2.2 Boundary Integral Equations

Boundary Element Methods consist in solving a set of discretized integral equations, for given boundary conditions. These integral equations arise from the representation theorem, that expresses the field values at any point of a medium, as a function of the field values on the boundary.

To begin with, let us consider a homogeneous domain  $\Omega$  (finite or infinite), delimited by a boundary  $S$ . The Green's functions  $G$  and  $\Sigma$  are respectively the displacement and stress

responses for a point force impulse in a given medium that contains  $\Omega$ . If this medium has homogeneous boundary conditions (i.e. either traction or displacement is null at any point of the boundary), we have the symmetry properties for  $G$  and  $\Sigma$ :  $G_{ij}(\xi, \mathbf{x}) = G_{ij}(\mathbf{x}, \xi) = G_{ji}(\xi, \mathbf{x})$  and  $\Sigma_{jik}(\xi, \mathbf{x}) = -\Sigma_{jik}(\mathbf{x}, \xi)$ , where  $\mathbf{x}$  and  $\xi$  are two different points of the domain  $\Omega$ .

Somigliana's identity gives an expression of displacement  $u$  at any point inside  $\Omega$  (e.g. Aki & Richards, 1980; Bonnet, 1995; Cole et al., 1978):

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \int_0^t d\tau \int_S [G_{ji}(\xi, t, \mathbf{x}, \tau) T_j(\xi, \tau) - u_j(\xi, \tau) \Sigma_{jik}(\xi, t, \mathbf{x}, \tau) n_k(\xi)] dS_\xi + \int_0^t d\tau \int_\Omega f_j(\xi, \tau) G_{ji}(\xi, t, \mathbf{x}, \tau) dV_\xi \quad (2.1)$$

where  $T(\xi, \tau)$  is the traction at the boundary,  $n(\xi)$  is the normal to the boundary pointing outside  $\Omega$  and  $f(\xi, \tau)$  is a body force density inside the domain  $\Omega$ .  $G_{ji}(\xi, t, \mathbf{x}, 0)$  and  $\Sigma_{jik}(\xi, t, \mathbf{x}, 0)$  are the responses, at time  $t$ , at point  $\xi$ , of an infinite homogeneous medium to a unit force impulse, applied at point  $\mathbf{x}$ , in the direction  $i$  (Stokes' solution). They represent respectively the displacement along  $j$  and the stress tensor component  $\sigma_{jk}$ .

We then make point  $\mathbf{x}$  tend toward a point  $\mathbf{x}_0$  on a sufficiently smooth boundary  $S$ . Due to the singularity of the kernels, a limiting process is required. The equation that we obtain involves boundary conditions only (Bonnet, 1995):

$$\frac{1}{2} u_i(\mathbf{x}_0, t) = \int_0^t d\tau \oint_S [G_{ji}(\xi, t, \mathbf{x}_0, \tau) T_j(\xi, \tau) - u_j(\xi, \tau) \Sigma_{jik}(\xi, t, \mathbf{x}_0, \tau) n_k(\xi)] dS_\xi + U_{inc}(\mathbf{x}_0, t) \quad (2.2)$$

where  $U_{inc}$  stands for the displacement due to internal body forces in the absence of any boundary.

$G$  and  $\Sigma$  are respectively singular and strongly singular functions (i.e. they respectively behave like  $O(1/r)$  and  $O(1/r^2)$ ). These singularities are "extracted" during the limiting process, and the surface integrals are then taken in the Cauchy Principal Values (CPV) sense (Cole et al., 1978; Bonnet, 1995). We denote them  $\oint$ . The integration on surface elements that contains the "receiver" point  $\mathbf{x}_0$  is then to be performed carefully. We call the integral terms corresponding to these particular elements the "self-effect" (or "self-influence") terms.

In the case of a topography, the boundary is a free surface, traction is null, and we write for any point  $\mathbf{x}$  in  $S$ :

$$\frac{1}{2} u_i(\mathbf{x}, t) = \int_0^t d\tau \oint_S u_j(\xi, \tau) \cdot \Sigma_{jik}(\mathbf{x}, t, \xi, \tau) \cdot n_k(\xi) dS_\xi + U_{inc}(\mathbf{x}, t) \quad (2.3)$$



Another integral formulation of the problem can be used, which is an indirect representation of the displacements and stresses by means of an intermediate force density distribution. For the free surface problem, we write:

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \int_0^t d\tau \int_S \Phi_j(\mathbf{x}_0, \tau) G_{ij}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, \tau) dS^0 + U_{inc}(\mathbf{x}, t) \quad (2.4)$$

$$0 = \frac{1}{2} \Phi_i(\mathbf{x}, t) + \int_0^t d\tau \oint_S \Phi_j(\mathbf{x}_0, \tau) \Sigma_{ijk}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, \tau) n_k(\mathbf{x}) dS^0 + T_{inc}(\mathbf{x}, t) \quad (2.5)$$

and this leads to the Indirect Boundary Element Method (IBEM), as in Sánchez-Sesma & Campillo (1991).

With the indirect method, we cannot take advantage explicitly of the simple stress conditions of the free-surface problem, and we have to solve a couple of integral equations. First we evaluate the force density distribution  $\Phi$  by means of equation (2.5), and then we obtain the displacement with a second integration, using (2.4). This may cause an additional numerical error in the solution process, even if the two formulations are mathematically equivalent.

In the direct formulation of the boundary equations, a constant interpolation is classically assumed for stress, when it is linear for displacement (Cole et al., 1978; Mansur and Brebbia, 1982; Bonnet, 1995). So, at first sight, since the force density  $\Phi$  is homogeneous to a stress distribution, it seems that an interpolation scheme of low order could be used. Thus, either this low order interpolation would simplify the implementation of the method, or a higher order interpolation would improve the accuracy.

Actually, the interpolation scheme order does not depend on the kind of physical field which is interpolated, but rather on the kernel that is integrated (namely, the weakly singular function  $G$  or the strongly singular function  $\Sigma$ ). Hence, the same order of interpolation should be used for  $\Phi$  in equation (2.5) as for  $u$  in equation (2.3).

A comparison of our time-domain approach with a frequency-domain approach using indirect formulation (Sánchez-Sesma & Luzón, 1995) shows that the latter can use coarser spatial discretization for the same level of accuracy. Our interpretation is that time domain approaches require a finer spatial discretization, because integration is made in the space and time domain. As we first perform time integration and then integrate over the space domain, this last integration is made over a function fluctuating more rapidly than in the frequency domain approach. A finer spatial discretization is then required.

Finally, the solution of the wave equation is computed by solving a discretized form of (2.3) at a set of collocation points, iteratively for each time-step. To solve these equations,

a trade-off has to be made between two opposite strategies, in order to best accommodate to the amount of memory that we can use. One strategy is to write explicitly the full matrix that has to be solved, store it entirely and compute only a few number of additional terms at each new time iteration. The other strategy does not require so much memory, but is cpu time consuming. It consists in recomputing every coefficient at each time-step, thus avoiding the storage of the matrix.

## 2.3 BEM Discretization

### 2.3.1 Space Discretization

Classical discretization schemes for a surface use either flat elements (triangular, quadrangular) or quadratic elements (6-points triangular, 8 or 9-points quadrangular), as is found in Banerjee et al. (1986), Bonnet (1995), or Cayol & Cornet (1997). Field values are often interpolated using the same interpolation functions as for the geometry (isoparametric interpolation): bilinear for flat elements, quadratic for quadratic elements...

These discretization schemes are relatively heavy to handle since they suppose: 1) to use a connection table which gives the points associated with a given element, 2) to work with local coordinates on each element. Furthermore, the numerically singular integration is difficult to treat carefully (e.g. Bonnet, 1995).

A simpler discretization of the surface is obtained by considering a collection of flat disks of homogeneous sizes, centered on the collocation points. This approach was proposed by Sánchez-Sesma and Luzón (1995). Obviously, this does not lead to an exact discretization of the surface, as we observe overlapping or empty spaces between adjacent disks (even if the average surface  $S$  remains constant). This discretization scheme is simple to implement, as a surface element corresponding to a collocation point is completely defined by the normal to the surface and the radius of the disk only. Moreover, it enables to regularize easily the self influence integral term.

We show that the use of such a rough discretization gives accurate results. In the case of a flat topography, for a particular choice of the displacement field, we evaluate analytically the space integrals for the self-influence of a disk. The comparison with numerical integration on a square of same area shows less than 1% of error, for a disk of such size that the discretization is of the order of 4 points per minimum wavelength.

Three interpolation schemes have been successively tested:



1) The first one used constant field values on circular elements (as do Sánchez-Sesma & Luzón (1995) in the frequency domain). With this approximation, we observed very large errors (amplitudes varying from half to double).

2) A 3 points barycentric interpolation was then tried. This interpolation is not accurate enough for rapidly varying topography or for rapidly varying incident field (e.g. a point source near the free surface).

3) Finally, we used a more classical interpolation scheme, requiring that the projection of the collocation points on a horizontal plane is a regular rectangular grid. The areal elements are flat rectangles, as the covering of the area is better than with disks. We kept the disk approximation only for computing self influence terms, as it permits an easy regularization. We chose a bilinear (4 points), quadratic (9 points) or higher degree interpolation of the field terms, with respect only to horizontal coordinates. This discretization and interpolation scheme is valid as long as the topography slopes and slope variations are kept reasonably small. Accuracy of results is showed in section 4.

### 2.3.2 Time Discretization and numerical noise

A constant time-step  $\Delta t$  is assumed. Mack (1991) showed that a piecewise constant time interpolation in a 3D scheme gives rise to singularities and cancel self-effect terms for traction. We then use, following most authors, a piecewise linear interpolation, to evaluate the displacement values  $u(t)$ . Unlike in some other methods (e.g. finite differences), there exists no stability or convergence rules for the choice of the value of  $\Delta t$ .

Since Elastodynamic's Green's functions are causal functions, integral equations also respect causality. However, the interpolation functions that we use have separate dependences in time and space, which is in itself non-causal. So, in order not to violate too much the causality property, interpolation functions have to be localized (Cole et al., 1978):  $\Delta t$  is chosen small enough to ensure that waves may not propagate between distant nodes in one time iteration (Mansur & Brebbia, 1982). The time step  $\Delta t$  is taken of the order of  $\frac{L}{\alpha}$ , with  $L$  being the average distance between two collocation points and  $\alpha$  the P-wave velocity. This ensures that the time step is adapted to the meshing, but does not guaranty the stability of the scheme.

The time translation property of Green's functions leads to solving the same linear system at each time-step, and this favors noise amplification (Cole et al., 1978). This amplification has been observed both with explicit formulations (Rynne, 1985; Peirce & Siebrits, 1997) and implicit ones (Coda & Venturini, 1995). Stability analysis of the

time-marching scheme have been performed by Cole et al. (1978), Rynne (1985) et Peirce & Siebrits (1997), and they show that a time step leading to a stable scheme can be theoretically chosen, but no general rule was found. Some people even consider that the scheme is intrinsically unstable (I. Terrasse, personal communication). As we are interested only in finite time computations, we can say that our problem is only to keep noise (be it amplified or not) to a sufficiently low level.

In order to be consistent with the piecewise linear interpolation of  $u$ , we should use a piecewise constant interpolation for the derivatives  $u'(t) = \frac{\partial u}{\partial t}$ . However, discontinuous time derivatives lead to large inaccuracies. Consequently, we compute derivative terms with a central difference 2nd order scheme, and interpolate linearly between two consecutive time-steps. That is, for  $t = (m + \epsilon)\Delta t$ , (with  $0 \leq \epsilon \leq 1$ ), we write:

$$u'(t) = (1 - \epsilon) \frac{u_{m+1} - u_{m-1}}{2\Delta t} + \epsilon \frac{u_{m+2} - u_m}{2\Delta t}$$

This choice of the derivation formula has the effect to filter the highest frequencies, corresponding to the observed noise (approximately at half the Nyquist frequency).

Another way to reduce noise amplification is to assume a band limited source time function. While Banerjee et al. (1986), for instance, used a delta source time function, Coda and Venturini (1996) propose to use a smoother source time function, distributed over a finite time interval, in order to reduce numerical noise. In our case, since we are interested in modeling band limited seismic signals, we use a tapered Ricker wavelet.

### 2.3.3 Method of solution

The discretized form of the integral equation (2.3) forms a very large system. For realistic 3D problems, the full inversion becomes rapidly prohibitive on a workstation. To overcome this difficulty, we desire to write it in an explicit manner.

For each point  $x$ , at time  $t_M$  we can write the boundary equations as:

$$u(x, t_M) = f(u(\xi, t_m), \xi \in S, m \leq M)$$

where the  $u(\xi, t_m)$  are unknowns, so that the expression of  $u(x, t_M)$  is implicit. Replacing these unknown terms by values extrapolated in time yields an explicit expression for  $u(x, t_M)$ . The simplest extrapolation for displacement is to assume  $u(\xi, t_M) = u(\xi, t_{M-1})$  for each  $\xi$  on  $S$ . This is more stable than linear or more complicated extrapolation, and the accuracy of this pseudo-explicit method is surprisingly good. This is due to the fact that the contribution of the terms  $u(\xi, t_m)$  is not of first order, and also that the variations of  $u$  over one time-step remain weak.



This way of solving the integral equations system does not require much memory, as compared to the frequency domain methods. Another advantage of using this time-stepping algorithm is its similarity with domain methods such as finite differences or finite elements, which should permit to combine them together more easily. This leads to hybrid methods, such as the one developed by Moczo et al. (1997).

### 2.3.4 Spatial Integration and Regularization

As no linear system has to be solved, the main computation effort in the solution process lies in the evaluation of the space-time integral terms in equation (2.3). Spatial integrals are difficult to compute analytically, but this is actually not needed: the error due to numerical integration remains smaller than that introduced by surface discretization. In contrast, linear time interpolation leads to an easy integration. So we first evaluate analytically the time-integrals, and then perform the spatial integration numerically.

Gaussian quadrature formulae are used over each areal element. As the Green's functions decrease rapidly with distance, the influence of one element will also decrease with its distance to the receiver point, and its variation on an areal element will decrease as well. So integration can be made more roughly for the farthest elements.

Thus we chose, after numerical tests, to use a sixteen points Gaussian quadrature, only on the eight elements adjacent to the receiver element. For farther elements, only one integration point is used, which is the collocation point, located at the center of the element. This leads to accurate integration if a four points per minimum wavelength discretization is used.

Self-effect terms have to be computed most carefully, because they give the largest contributions, and the rapidly varying kernel is not trivial to integrate in space. The difficulty comes from the strong singularity ( $O(1/r^2)$ ) of the traction Green's functions near the receiver points. One way to overcome this difficulty is to consider flat symmetric elements. Then, if we assume a constant displacement on the element for each given time (as do Cole et al., 1978), the symmetry properties of the  $\Sigma$  Green's functions yield a null contribution of the CPV over the element (Sánchez-Sesma and Luzón, 1995). This is not acceptable because it would mean that no effect is due to times closer than one time-step ahead (Mack, 1991), and it indeed leads to inaccurate results.

For a general displacement field  $u$ , we can show that its even part has a zero contribution in the integral over the flat disk. So, if we use a polynomial interpolation, only the odd powers will contribute, and the integral can be regularized as follows:

### 2.3. BEM Discretization

$$\begin{aligned} \oint_{Disk} u \cdot \Sigma \cdot dS &= \underbrace{\int_{Disk} u_{even} \Sigma \cdot dS}_{=0} + \int_{Disk} u_{odd} \Sigma \cdot dS \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^R u_{odd}(r, \theta) \cdot \Sigma \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \underbrace{\frac{u_{odd}(r, \theta)}{r}}_{regular} \cdot \underbrace{\Sigma \cdot r^2}_{regular} \cdot dr \cdot d\theta \end{aligned} \quad (2.6)$$

where  $R$  is the disk radius.

Since  $\Sigma$  is only strongly singular, the integration is regularized: we integrate the non-singular kernel  $u_{odd} \cdot \Sigma \cdot r$  on  $[0, 2\pi] \times [0, R]$ . This regularized integral is evaluated numerically, with a Gaussian quadrature rule. We use  $8 \times 2$  points of integration on the domain  $[0, 2\pi] \times [0, R]$ .

We found that a linear spatial interpolation between nodes is not satisfactory to evaluate properly the self-effect terms. Hence, as only the odd powers of the interpolation polynomial are contributing, this polynomial should be of degree at least three. For symmetry reasons (no side is to be particularized), we used a five-points Lagrangian interpolation, which means a polynomial of order 4, for the  $x$  and  $y$  coordinates. This spatial interpolation scheme is the same for near elements and for self-effect terms.

### 2.3.5 Effects of Model Size Finiteness

Since we consider a model of finite size, we expect to observe reflected waves from the model edges (Sánchez-Sesma & Campillo, 1991). This problem is even more stringent with obliquely incident waves because they generate surface waves at the edge of the model, that interfere with the diffracted field. In order to avoid these spurious waves, absorbing boundary conditions are used. For example, Yokoi & Sánchez-Sesma (1998) use a analytical reference solution for a plane free-surface.

As has been proposed by Cerjan et al. (1985) for volume methods, we apply a taper on the edges, in order to reduce the creation of spurious waves. That is, each computed field value at a collocation point is weighted with a spatial function which goes smoothly from 0 at the edge to 1 inside the model. This actually attenuates reflected waves more efficiently than if we had only enlarged the size of our model. We observed that a taper width of a few times the minimum wavelength is large enough to eliminate spurious waves, as long as the bandwidth of the signal computed does not extend too much ( $\lambda_{max}/\lambda_{min} < 10$ ).



MODEL:	Plane	Hemisphere	Hemisphere	Gaussian	Gaussian
	Surface			Hill	Hill
INCIDENT WAVE:	(Explosion)	(S Wave)	(P Wave)	(S Wave)	(Explosion)
$\rho$ ( $kg.m^{-3}$ )	3000	2400	2400	2200	1200
$\alpha$ ( $m.s^{-1}$ )	6000	5000	4330	3200	3000
$\beta$ ( $m.s^{-1}$ )	3500	2500	2500	1847.5	1500
Main period $T_c$	36 s	1.2 s	2.31 s	97.4 ms	0.67 s
Average					
elements size L	11500 m	368 m	531 m	16 m	77 m
Time-step $\Delta t$	1.98 s	37.5 ms	90 ms	4 ms	17.4 ms
$G_{Rmin}$	4	3	4	4	4
Model size	4225 pts	5478 pts	1828 pts	3721 pts	8281 pts
Time length	297 s	11.25 s	18 s	0.7 s	4 s
Core memory	68 Mo	88 Mo	20 Mo	56 Mo	209 Mo
CPU time	5h	8h	2h30		65h

TAB. 2.1 – Parameters used for the different models. The computations were performed on sequential computers: IBM Risk 6000/590 workstations, with Power2 processors and a clock frequency of approximately 70 MHz.

## 2.4 Comparison with other Methods

In this implementation of the Boundary Element Method, the incident wave field can be either a plane wave, or due to a point source with a given moment tensor. We derived the analytical expressions of displacement and stress for a general moment tensor in a homogeneous infinite space (appendix A).

In order to validate the method, seismograms have been computed for different topographies and different types of incident waves. Comparison with other methods (Discrete Wavenumber, FD, spectral element method) shows the good accuracy of the method. Table 2.1 summarizes the parameters of the different models that we used.

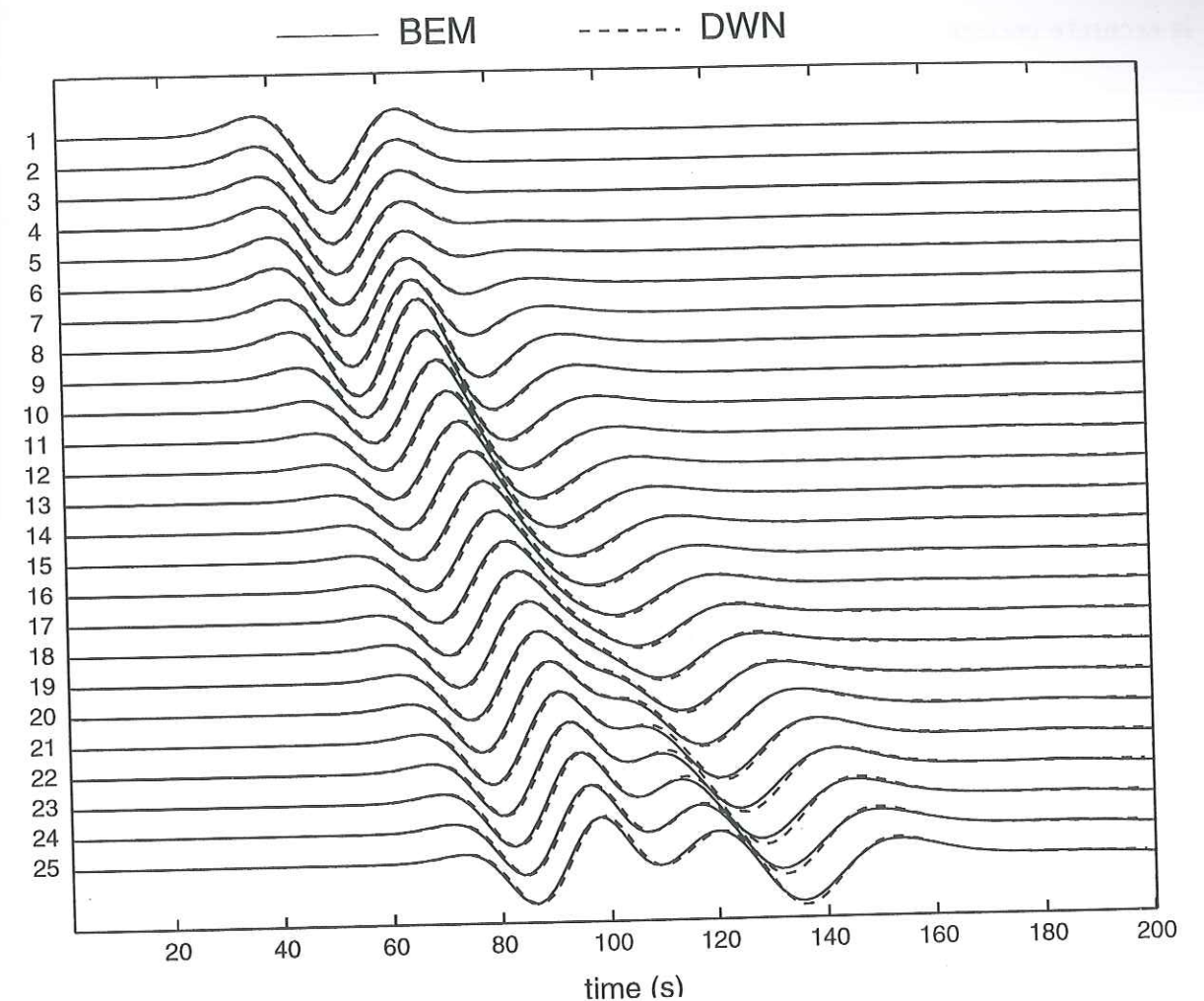


FIG. 2.1 – Explosion 50 km below a flat free surface. The source function is a Ricker wavelet with dominant P-wavelength  $\lambda_0 = 216$  km. The vertical component is displayed for a set of lined up receivers (receiver 1 to 25), the first one being located above the source. Solid lines show BEM results and dashed lines show Discrete Wavenumber solution.

### 2.4.1 Explosion below a Flat Free Surface

As a first test, we used a 1D model, simply consisting in a homogeneous half space under a flat free surface, in order to explore our ability to treat near surface point sources. The interest of this test lies in the difficulty of treating such sources. The incident field spatial variations are important on the surface just above the source, so the coarse sampling must be compensated by an adapted interpolation scheme. Moreover, inhomogeneous waves interact with the free surface before being attenuated, which gives rise to surface



waves. We can therefore verify with this model that our fourth order interpolation scheme is accurate enough, and that Rayleigh waves are well generated.

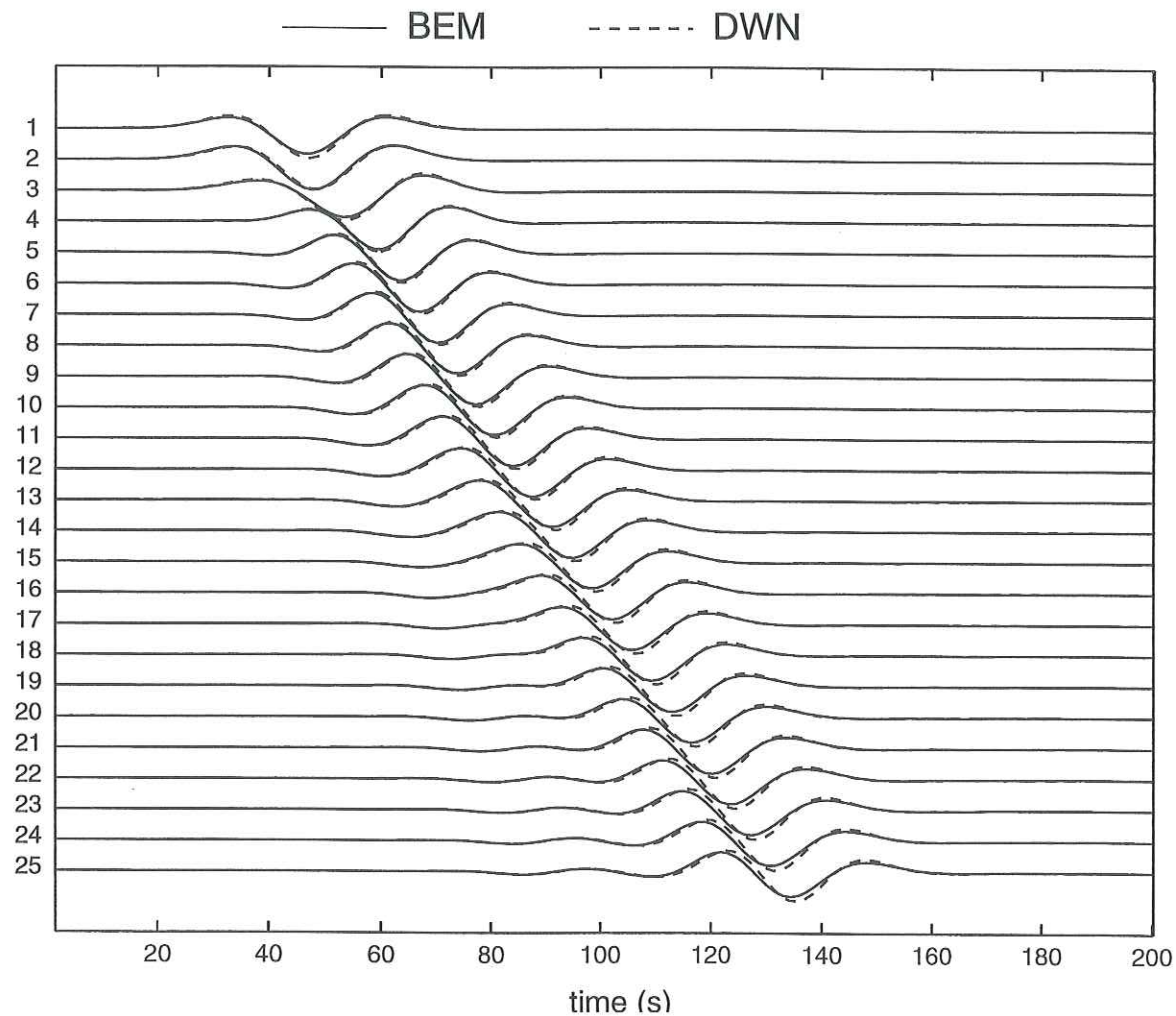


FIG. 2.2 – Explosion 10 km below a flat free surface. The source function is a Ricker wavelet with dominant P-wavelength  $\lambda_0 = 216$  km. The vertical component is displayed for a set of lined up receivers (receiver 1 to 25), the first one being located above the source. Solid lines show BEM results and dashed lines show Discrete Wavenumber solution.

The source is an isotropic explosion, with a Ricker wavelet as time function. The number  $G_{Rmin}$  of points per minimum Rayleigh wavelength is given by:

$$G_{Rmin} \equiv \frac{\lambda_{min}^{Rayleigh}}{L} = \frac{0.92 \lambda_{min}^S}{L} = \frac{0.92 (\lambda_0^S/2.5)}{L} = \frac{0.92 \beta T_0}{2.5 L} = 4$$

The source is located at depths 50 km and 10 km under the free surface (i.e. 0.23 and 0.046  $\lambda_0$  respectively, where  $\lambda_0$  is the dominant P-wavelength). We compare the results

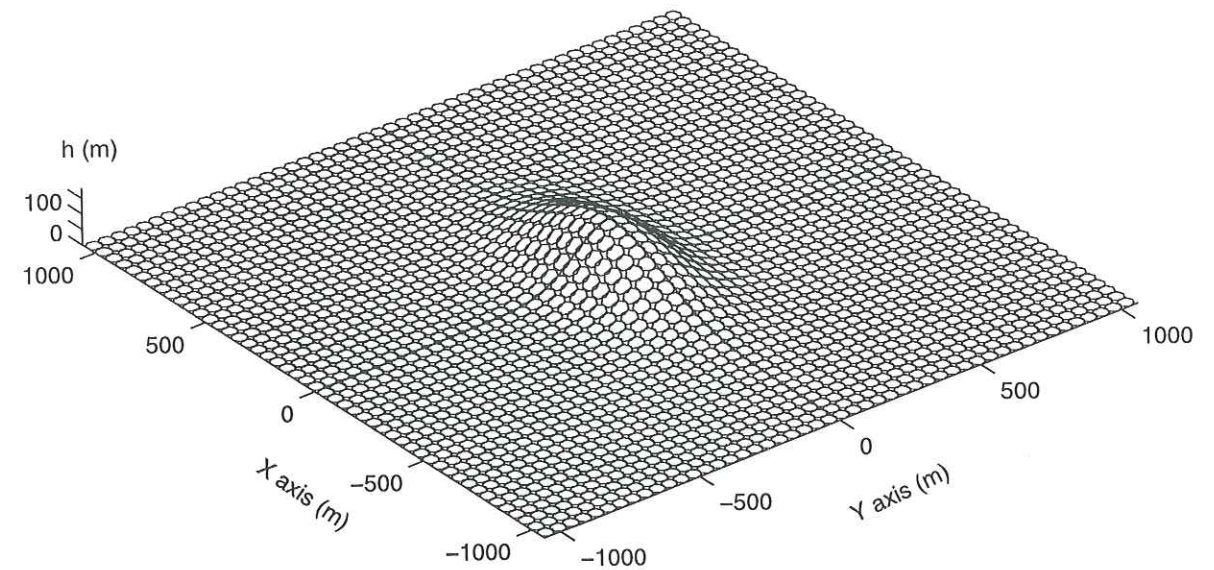


FIG. 2.3 – Discretization of the Gaussian topography of height  $h=180$  m, with circular elements. The receivers are located along the ridge of the topography parallel to the X-axis. The shape of the hill is given by  $z = h \exp[-\frac{1}{2}(x^2/a^2 + y^2/b^2)]$ , with  $a = 250$  m and  $b = 125$  m.

of the boundary element method with those given by the Discrete Wavenumber method. Figures 2.1 and 2.2 present the seismograms obtained with both methods for a set of receivers, the first one being located above the source. We observe a good agreement between the two methods (a few percent difference between peak amplitudes), even with a source close to the surface.

#### 2.4.2 Vertical Plane S-Wave impinging on a Gaussian Topography

In order to investigate the effects of a 3D topography alone, we computed the response of a topography to a vertically incident plane wave. We consider a Gaussian hill whose shape is given by  $z = h \exp[-\frac{1}{2}(x^2/a^2 + y^2/b^2)]$ , with  $a = 250$  m,  $b = 125$  m and  $h = 180$  m (Figure 2.3). The incident plane wave is an S wave polarized along the short axis of the topography (y-axis), and the source function is a Ricker wavelet with a dominant wavelength  $\lambda_0 = h$ .



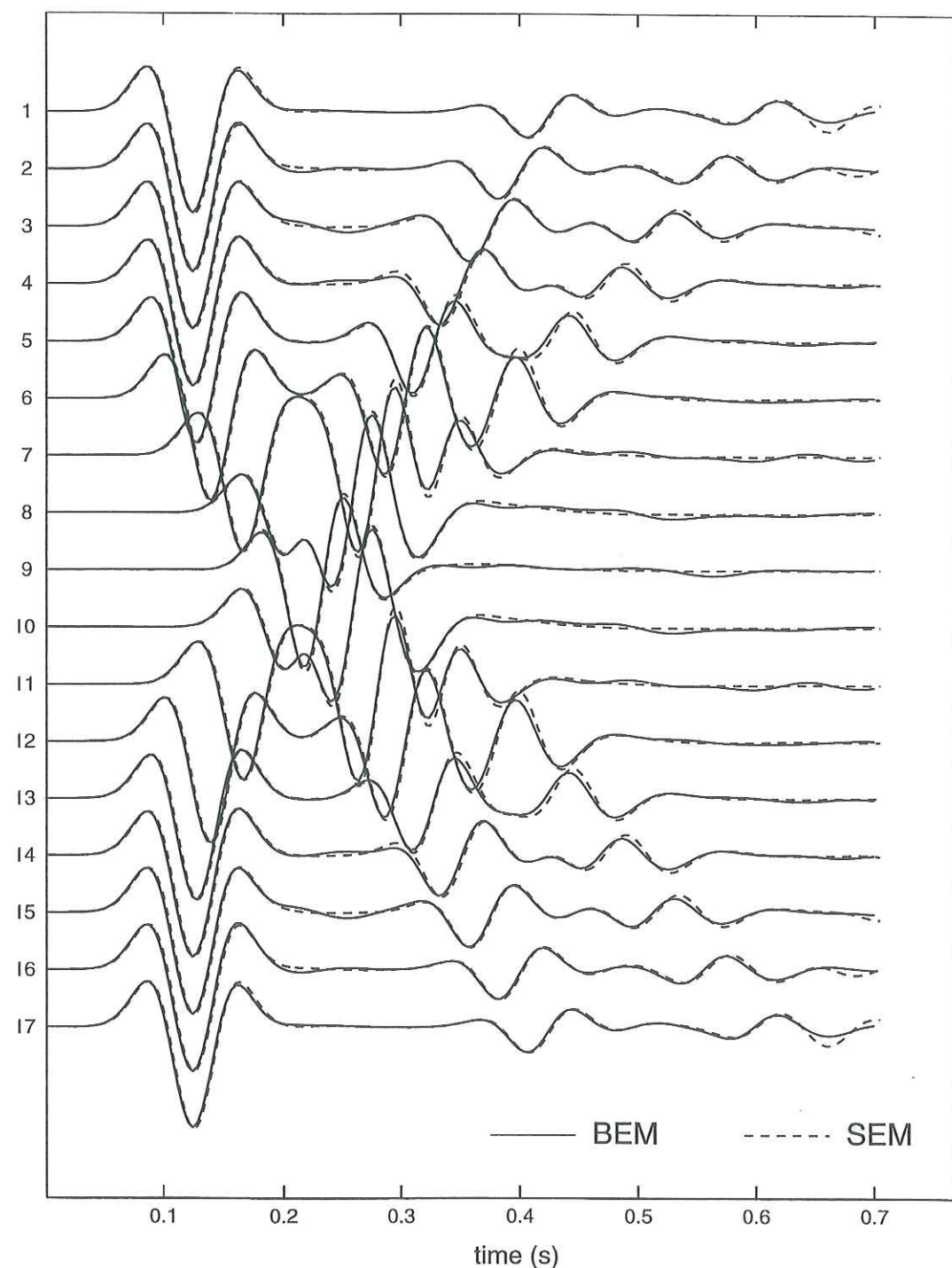


FIG. 2.4 – Horizontal component of displacement (along  $Y$ -axis) for a vertically incident plane  $S$ -wave (polarized along  $Y$ -axis, with dominant wavelength  $\lambda_0 = h$ ) on a Gaussian topography (see figure 2.3). Solid lines show the BEM solution and dashed lines show the Spectral Element Method solution, by Komatitsch and Vilotte (1998).

In Figure 2.4, we compare our results with those obtained by Komatitsch & Vilotte (1998) using their spectral element method. The agreement is good even for the Rayleigh waves generated by the topography, for which the number of points per wavelength is the smallest. In particular, the peak amplification at the top of the hill is almost the same for the 2 methods. The discrepancies that we observe at the end of the seismograms, for receivers near to the edge, are due to truncation effects, which create spurious reflections.

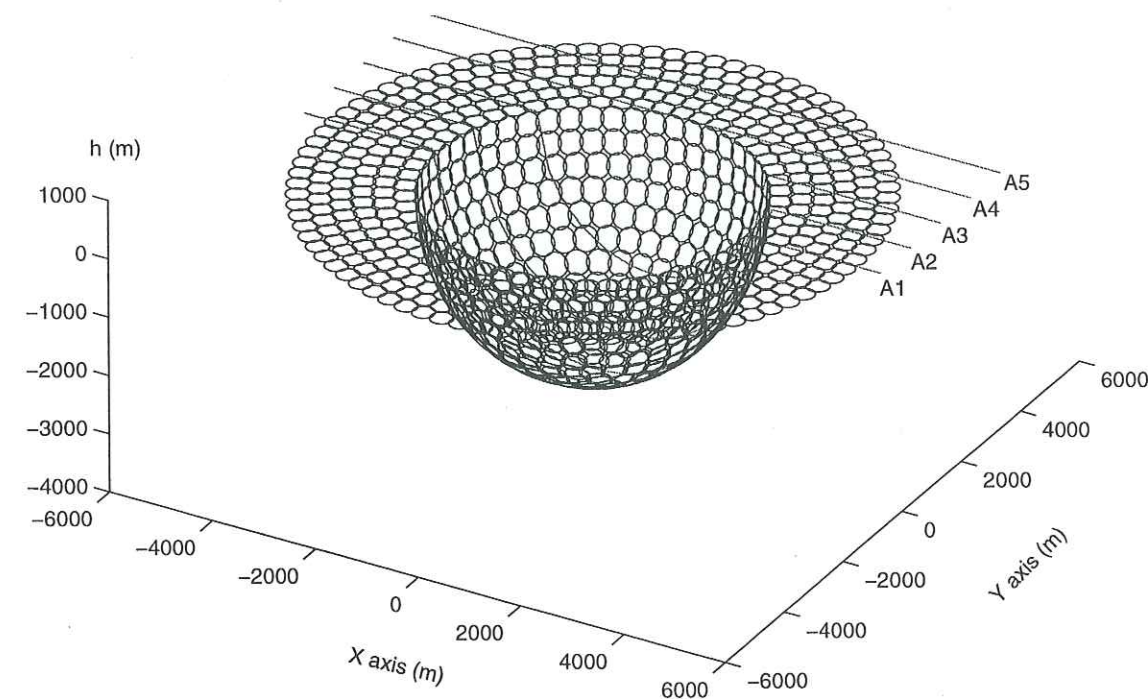


FIG. 2.5 – Hemispherical cavity meshing with disks. The five receiver lines considered (A1 to A5) are also displayed. The cavity radius is  $a = 3000$  m.

### 2.4.3 Plane Wave impinging on an Hemispherical Cavity

This example is interesting because the topography of which we compute the response is no more smooth. We consider a topography with sharp edges, consisting of an hemispherical cavity, of radius  $a$ , in a homogeneous half space (Figure 2.5).

In a first test, the incident wave is a vertical plane  $P$  wave, and we compare our results with 3 other methods in the frequency domain, for the wavelength  $\lambda = 4a$ , and a Poisson coefficient  $\sigma = 0.25$ . Sánchez-Sesma (1983) used an approximate boundary method, Mossessian & Dravinski (1989) an indirect boundary integral equation method,



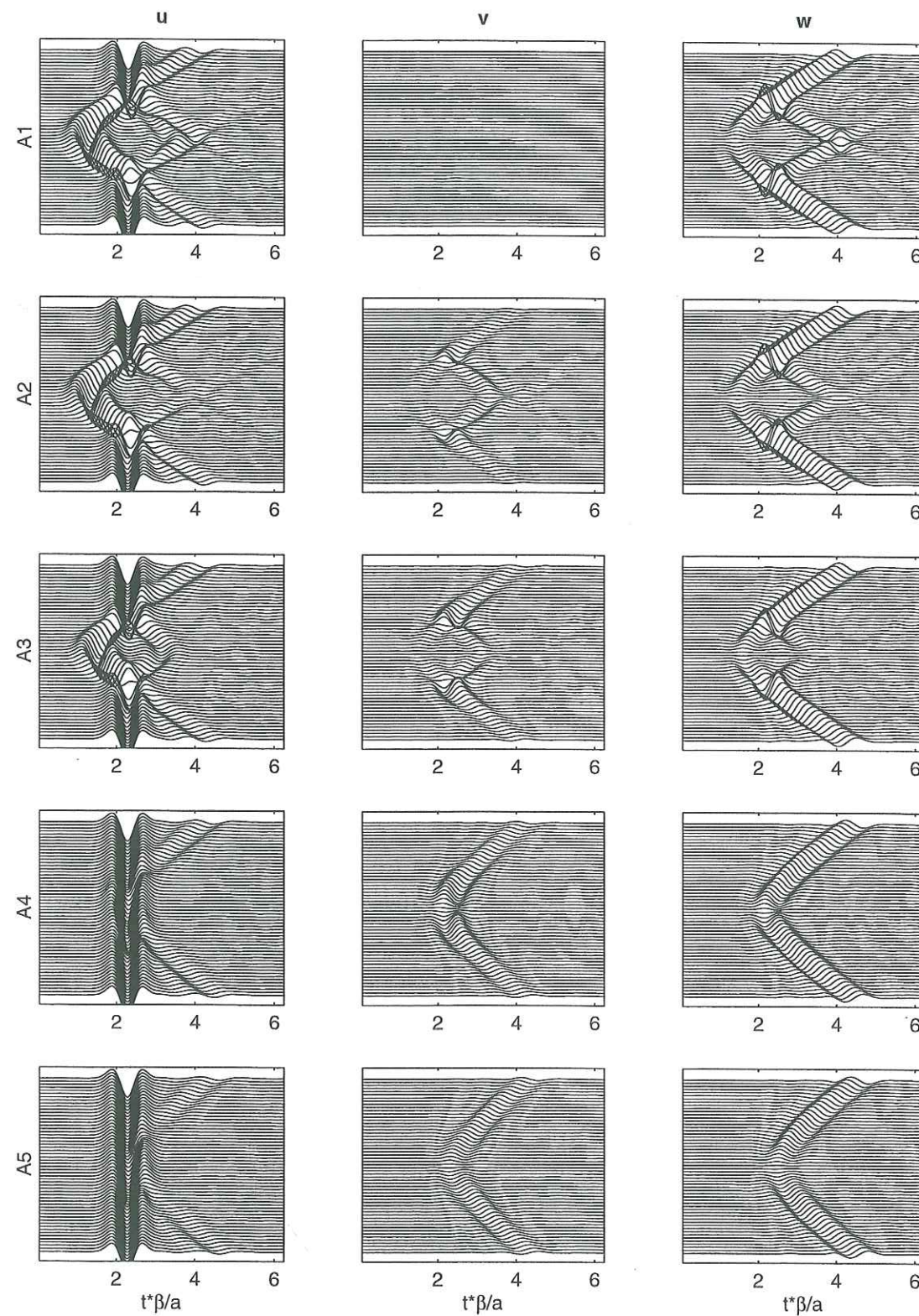


FIG. 2.6 – Vertical plane  $S$  wave ( $\lambda_0 = a$ ) impinging on a hemispherical cavity. The three components of the seismograms computed with our Boundary Element Method are shown for the five receiver lines A1 to A5.

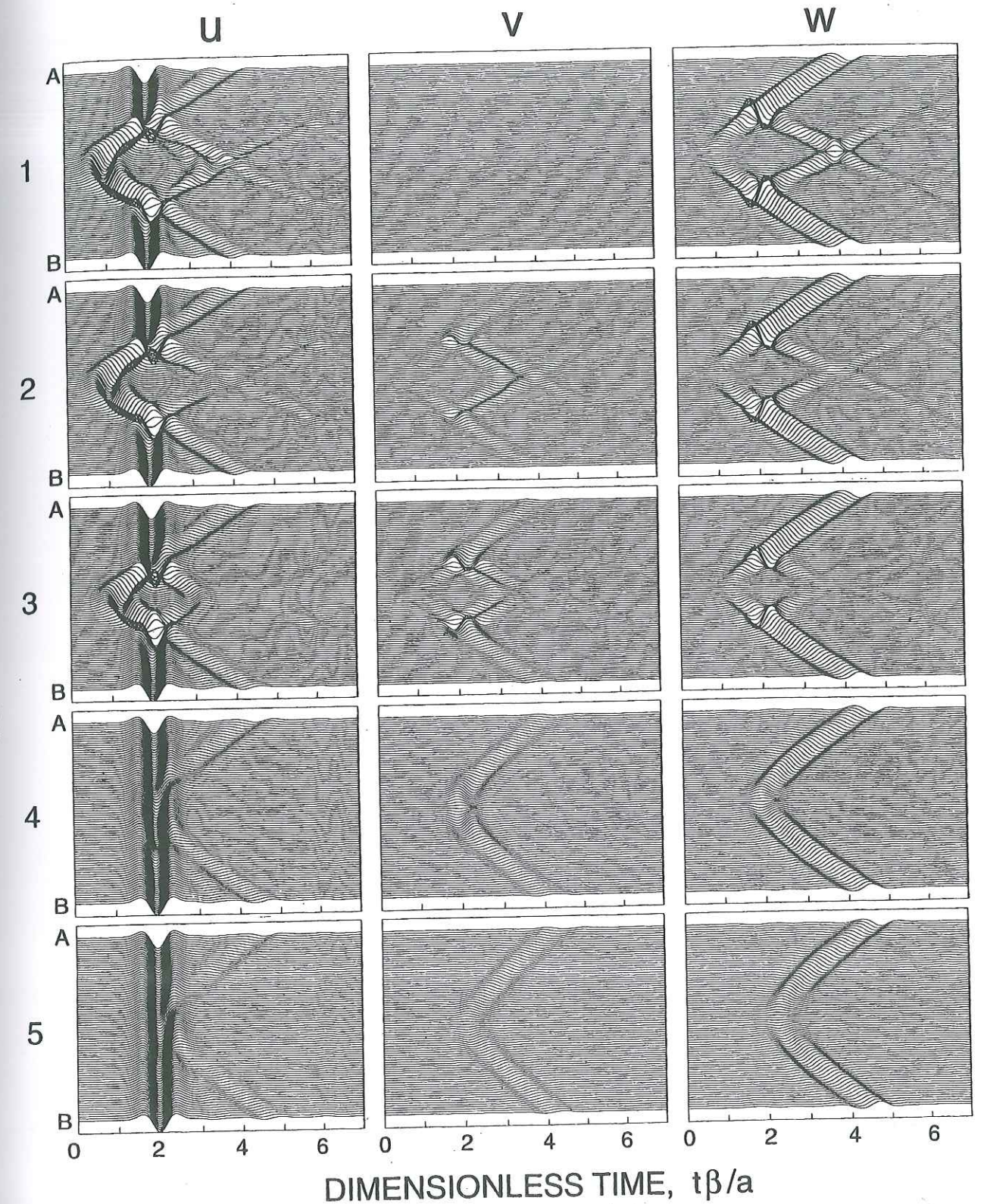


FIG. 2.7 – Vertical plane  $S$  wave ( $\lambda_0 = a$ ) impinging on a hemispherical cavity. The three components of the seismograms computed with the FDM by Ohminato & Chouet (1997) are shown for the five receiver lines A1 to A5.



and Lúzon et al. (1997) an indirect boundary element method in the frequency domain. The agreement between the different methods is not very good, but our method was not designed for handling such a sharp topography: as the discretization of the model is rough, the method is designed for smooth topographies. In that case, the spectral element method used by Komatitsch & Tromp (1999), for example, gives far better results.

In an other computation, a vertical plane S wave polarized along the x-axis is diffracted by the topography. The qualitative comparison of the seismograms with the finite difference code of Ohminato & Chouet (1997) is shown on Figure 2.6 and 2.7. Our results contain a little perturbation near the edges and the bottom of the hemisphere, but this effect is weak. However, we observe that sharp edges are well treated in this case, due to the large wavelength used ( $\lambda = 2a$ ).

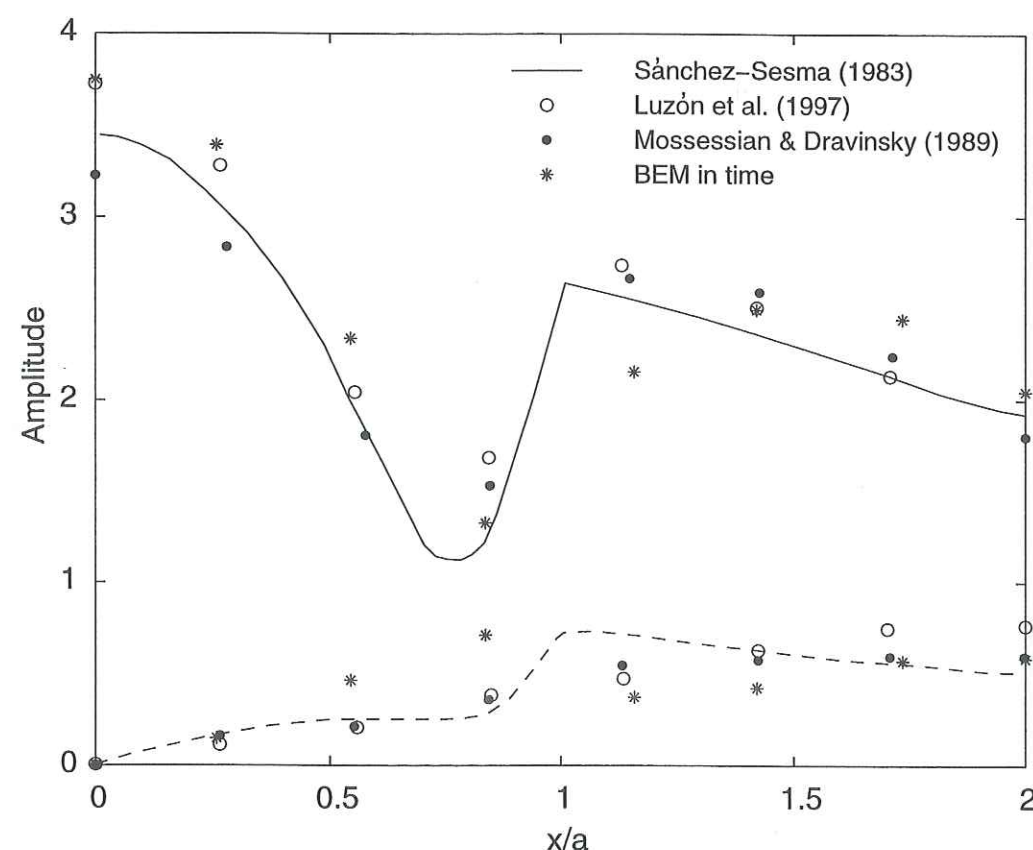


FIG. 2.8 – Surface amplitudes for the horizontal and vertical displacements due to a vertically incident P wave ( $\lambda_P = 4a$ ) on a hemispherical cavity. Sánchez-Sesma (1983) results are plotted in solid and dashed lines for the vertical and horizontal displacements respectively. Mossessian and Dravinsky's (1989) results are plotted as filled circles, Luzón et al. (1997) as empty circles, and our solution as stars.

#### 2.4.4 Explosion below a Gaussian topography

The case of a point source located near the surface of a hill combines two of the difficulties already treated. The topography that we use is again a Gaussian hill, with shape  $z = a \exp(-r^2/a^2)$  and  $a = 1000$  m. The isotropic source is located 100 m under the surface. The seismograms are computed at six receiver locations (Figure 2.9). In Figure 2.10, we compare them to those obtained with the FD method by Ohminato & Chouet (1997) and with the Spectral Element method (SEM) by Komatitsch & Tromp (1999).

First, we notice that the agreement between BEM and SEM is remarkable, and this constitutes an excellent validation for both methods. However, we observe that late arrivals have slightly lower amplitudes with BEM than with the Spectral Element Method.

The agreement between BEM and FD methods is not so good, particularly concerning the amplitude and phase of the surface waves. With the FDM, these waves generally arrive later and have a larger amplitude. Actually, the FD method used by Ohminato & Chouet is a relatively coarse one, as it uses only second order schemes both in time and space. Moreover, the free surface is modeled with a staircase approximation, which may cause spurious diffractions. This can explain the discrepancies observed.

At the end of the seismograms computed with the Boundary Element Method, we can observe oscillations with exponentially growing amplitude: this corresponds to the appearance of numerical noise.

## 2.5 Conclusions

We have proposed a time-domain Boundary Element Method to compute the response of 3D topographies. The method can be implemented on a workstation and leads to acceptable computation time. Although simple and using a rough discretization of the surface, it is efficient as long as the size of the model is not too large (i.e. smaller than 25 times the minimum wavelength).

Various examples of applications to three-dimensional problems are given, and the comparison with different other methods (FDM, spectral element method) has proved the accuracy of our results, even in the presence of sharp edges.

Since the boundary conditions are directly solved in the time-domain, a coupling with other methods, such as FD, should be possible. This could permit the treatment, for instance, of the case of a semi-infinite domain with an heterogeneous inclusion.



## 2.6 Acknowledgments

This work has greatly benefited from discussions with F. Sánchez-Sesma. D. Komatitsch and J. Tromp are also thanked for providing us with the solutions of their spectral element method, for comparison with our results. D. Komatitsch and F. Sánchez-Sesma permitted to improve the paper, thanks to their detailed comments and suggestions on this work.

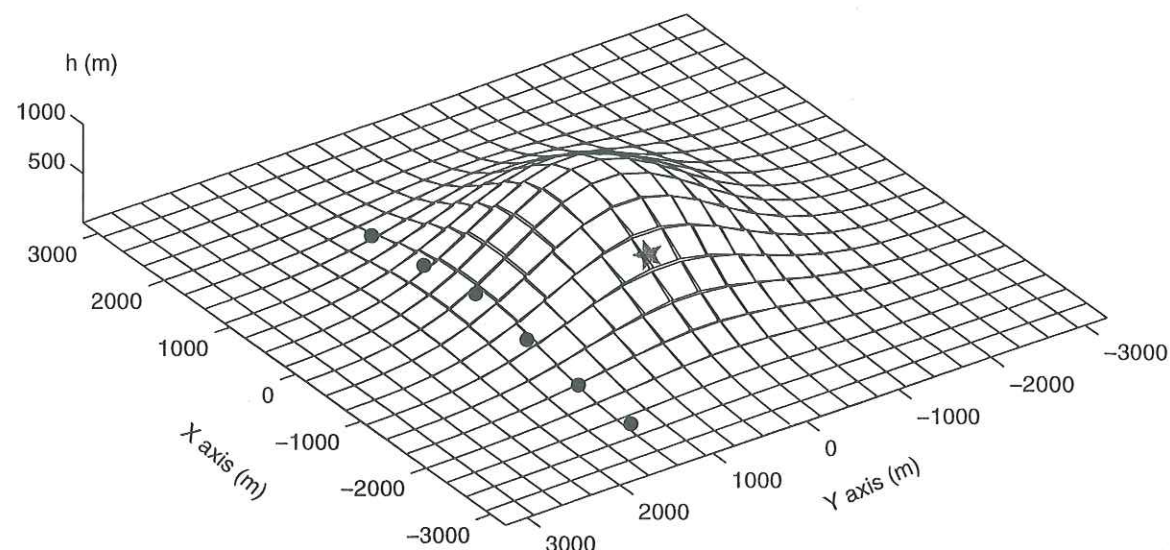


FIG. 2.9 - Gaussian topography discretization:  $z = a \exp(-r^2/a^2)$ ,  $a = 1000\text{m}$ . For clarity, we have represented only a one point per minimum wavelength discretization. The six receivers (gray points) and the near surface explosion (star) are pointed. The  $x, y$  coordinates of the 6 receivers, in meters, are respectively  $(-2400, 1300)$ ,  $(-1600, 1300)$ ,  $(-800, 1300)$ ,  $(0, 1300)$ ,  $(800, 1300)$  and  $(1600, 1300)$ , with an origin set at the top of the hill. They are all located at the surface of the topography. The isotropic source is embedded in the hill at a depth of 100 m, with  $x, y$  coordinates  $(-800, 0)$ .

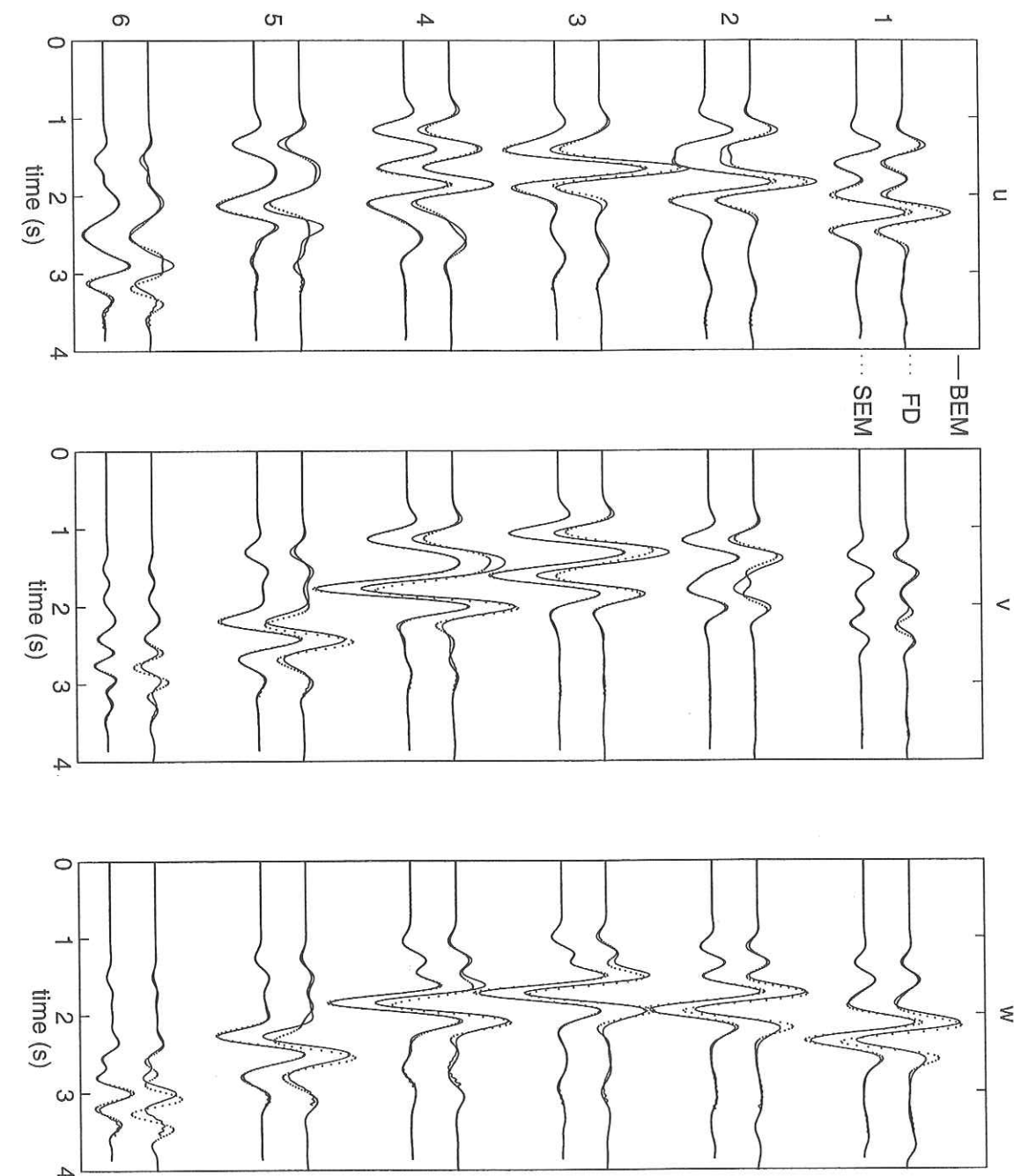


FIG. 2.10 - Explosion under the Gaussian topography (Figure 2.9), with a Ricker wavelet source time function, of dominant wavelength  $\lambda_0 = 2a = 2000\text{m}$ . Horizontal ( $u, v$ ) and vertical ( $w$ ) components of the seismograms computed at 6 receiver points, with three different methods. Solid lines are used for the BEM solution. FD and Spectral Elements method are plotted with dots. For each receiver (1 to 6), we show the comparison with the FD method by Ohminato (upper seismograms) and with the Spectral Elements by Komatitsch (lower seismograms).



## Appendix 2.A: Analytical expressions of displacement and stress tensors in a homogeneous medium, due to a moment tensor $M_{ij}$ , with a source time function $f(t)$

The source-receiver distance is  $r = \|\vec{x} - \vec{x}_0\|$ , and the unit direction vector is  $\vec{\gamma} = \frac{\vec{x} - \vec{x}_0}{r}$ . The displacement  $\vec{u}$  at point  $\vec{x}$  due to the moment tensor  $M_{ij}$  at point  $\vec{x}_0$  is given by Aki & Richards (1980):

$$u_i(t) = G_{ij,k_0} * M_{jk} = \frac{1}{4\pi\rho r^2} \left\{ \begin{aligned} & \left[ (5 \gamma^t M \gamma - \text{tr} M) \gamma_i - (M \gamma)_i - (M^t \gamma)_i \right] \frac{3}{r^2} g(t, r/\alpha, r/\beta) \\ & + \frac{1}{\alpha^2} \left[ (6 \gamma^t M \gamma - \text{tr} M) \gamma_i - (M \gamma)_i - (M^t \gamma)_i \right] f(t - r/\alpha) \\ & - \frac{1}{\beta^2} \left[ (6 \gamma^t M \gamma - \text{tr} M) \gamma_i - 2 (M \gamma)_i - (M^t \gamma)_i \right] f(t - r/\beta) \\ & + r \left[ \frac{\gamma^t M \gamma}{\alpha^3} \gamma_i \dot{f}(t - r/\alpha) - \frac{\gamma^t M \gamma \gamma_i - (M \gamma)_i}{\beta^3} \dot{f}(t - r/\beta) \right] \end{aligned} \right\} \quad (A1)$$

with

$$\begin{aligned} g(t, r/\alpha, r/\beta) &= f(t) * \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau \delta(t - \tau) d\tau = \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau f(t - \tau) d\tau \\ &= \left[ \tau f^{(-1)}(t - \tau) + f^{(-2)}(t - \tau) \right]_{\tau=r/\beta}^{\tau=r/\alpha} \end{aligned} \quad (A2)$$

Hooke's law then gives the stress tensor:

$$\sigma_{ip} = C_{ipml} u_{m,l} = \lambda \delta_{ip} u_{m,m} + \mu (u_{i,p} + u_{p,i}) \quad (A3)$$

The stress  $\tau$  on a unit surface normal to the unit vector  $\vec{N}$  reads:

$$\begin{aligned} \tau_i &= \sigma_{ip} N_p = \frac{1}{4\pi r} \left\{ \begin{aligned} & \frac{6\beta^2}{r^4} g(t, r/\alpha, r/\beta) \left[ (5 \gamma^t M \gamma - \text{tr} M) N_i - 5 \gamma^t N (7 \gamma^t M \gamma - \text{tr} M) \gamma_i \right. \\ & \quad \left. + 5A_i + 5B_i - C_i \right] \\ & + \frac{f(t - r/\alpha)}{r^2} \left[ \left( \left( 6 \frac{\beta^2}{\alpha^2} - 1 \right) \gamma^t M \gamma - \left( 4 \frac{\beta^2}{\alpha^2} - 1 \right) \text{tr} M \right) N_i \right. \\ & \quad \left. - 2 \frac{\beta^2}{\alpha^2} \left[ 3 \gamma^t N (15 \gamma^t M \gamma - 2 \text{tr} M) \gamma_i - 6A_i - 6B_i + C_i \right] \right] \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{f(t - r/\beta)}{r^2} \left[ (12 \gamma^t M \gamma - 2 \text{tr} M) N_i + 6 \gamma^t N \gamma_i (2 \text{tr} M - 15 \gamma^t M \gamma) \right. \\ & \quad \left. + 15A_i + 12B_i - 3C_i \right] \\ & + \frac{\dot{f}(t - r/\alpha)}{r\alpha} \left[ \left( \left( 8 \frac{\beta^2}{\alpha^2} - 3 \right) \gamma^t M \gamma - \left( 2 \frac{\beta^2}{\alpha^2} - 1 \right) \text{tr} M \right) N_i \right. \\ & \quad \left. - 2 \frac{\beta^2}{\alpha^2} \left[ (10 \gamma^t M \gamma - \text{tr} M) \gamma^t N \gamma_i - A_i - B_i \right] \right] \\ & - \frac{\dot{f}(t - r/\beta)}{r\beta} \left[ 2 \gamma^t M \gamma N_i - 2 (10 \gamma^t M \gamma - \text{tr} M) \gamma^t N \gamma_i + 5A_i + 2B_i - C_i \right] \\ & + \frac{\ddot{f}(t - r/\alpha)}{\alpha^2} \left[ \left( 2 \frac{\beta^2}{\alpha^2} - 1 \right) N_i - 2 \frac{\beta^2}{\alpha^2} \gamma^t N \gamma_i \right] \gamma^t M \gamma \\ & - \frac{\ddot{f}(t - r/\beta)}{\beta^2} \left[ A_i - 2 \gamma^t N \gamma^t M \gamma \gamma_i \right] \end{aligned} \quad (A4)$$

with

$$\begin{aligned} A_i &= \gamma^t N (M \gamma)_i + \gamma^t M^t N \gamma_i & B_i &= \gamma^t N (M^t \gamma)_i + \gamma^t M N \gamma_i \\ \text{and } C_i &= (M N + M^t N)_i \end{aligned}$$

$$\text{NB: } \gamma^t M \gamma \equiv \gamma_i M_{ij} \gamma_j \quad \gamma^t N \equiv \gamma_i N_i \quad \text{and} \quad \text{tr} M \equiv M_{11} + M_{22} + M_{33}.$$

## References

- Aki K. & P.G. Richards (1980) Quantitative seismology: theory and methods, *W.H. Freeman and Co.*, San Francisco, CA.
- Ahmad S. & P.K. Banerjee (1988), Time-domain transient elastodynamic analysis of 3-D solids by BEM, *Int. J. Num. Meth. in Engineering*, **26**, 1709-1728
- Banerjee P.K., S. Ahmad & G.D. Manolis (1986) Transient elastodynamic analysis of three-dimensional problems by Boundary Element Methods, *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, **14**, 933-949
- Bielak J., O. Ghattas & H. Bao (1998) Ground motion modeling using 3D finite elements methods, *The Effects of Surface Geology on Seismic Motion*, Irikura, Kudo, Okada & Sasatani (eds), Balkema, Rotterdam, 121-133
- Bonnet M. (1995) Equations intégrales et éléments de frontière, *CNRS editions, Eyrolles*, Paris



- Bouchon M. & J.S. Barker (1996) Seismic response of a hill: the example of Tarzana, California, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **86**, 66-72
- Bouchon M. & O. Coutant (1994) Calculation of synthetic seismograms in a laterally varying medium by the Boundary Element-Discrete Wavenumber Method, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **84**, 1869-1881
- Bouchon M., C.A. Schultz & M.N. Toksöz (1995) A fast implementation of Boundary Integral Equation Methods to calculate the propagation of seismic waves in laterally varying layered media, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **85**, 1679-1687
- Bouchon M., C.A. Schultz & M.N. Toksöz (1996) Effect of 3-D topography on seismic motion, *J. Geophys. Res.*, **101**, 5835-5846
- Cayol V. & F.H. Cornet (1997) 3D mixed Boundary Elements for elastostatic deformation field analysis, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, **34**, 275-287
- Cerjan C., D. Kosloff, R. Kosloff & M. Reshef (1985) A nonreflecting boundary condition for discrete acoustic and elastic wave equations, *Geophysics*, **50**, 705-708
- Coda H.B. & W.S. Venturini (1996) A simple comparison between two 3D time domain elastodynamic boundary element formulations, *Engng Anal. Boundary Elements*, **17**, 33-44
- Cole D.M., D.D. Kosloff & J.B. Minster (1978), A numerical Boundary Integral Equation Method for elastodynamics, I., *Bull. Seism. Soc. Am.*, **68**, 1331-1357
- Faccioli E., F. Maggio, R. Paolucci & A. Quarteroni (1997) 2D and 3D elastic wave propagation by a pseudo-spectral domain decomposition method, *J. Seismology*, **1**, 237-251
- Gaffet S. & M. Bouchon (1989) Effects of two-dimensionnal topographies using the discrete wavenumber-boundary integral equation method in P-SV cases, *J. Acoust. Soc. Amer.*, **85**, 2277-2283
- Geli L., P.Y. Bard & B. Jullien (1988) The effect of topography on earthquake ground motion: a review and new results, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **78**, 42-63
- Komatitsch D. & J. Tromp (1999) Introduction to the spectral-element method for 3-D seismic wave propagation, *Geophys. J. Int.*, **139**, 806-822
- Komatitsch D. & J.P. Vilotte (1998) The Spectral Element Method: an efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **88**, 368-392

- Luzón F., F.J. Sánchez-Sesma, J.L. Rodríguez-Zuniga, A.M. Posadas, J.M. Garcia, J. Martin, M.D. Romacho & M. Navarro (1997) Diffraction of P,S and Rayleigh waves by three-dimensional topographies, *Geophys. J. Int.*, **129**, 571-578
- Mack M.G. (1991) A three-dimensional Boundary Element Method for elastodynamics, *Ph.D. thesis*, University of Minnesota, U.S.A.
- Mansur W.J. & C.A. Brebbia (1982) Numerical implementation of the Boundary Element Method for two dimensional transient scalar wave propagation problems, *Appl. Math. Modelling*, **6**, 299-306
- Moczo P., E. Bistricky, J. Kristek, J.M. Carcione & M. Bouchon (1997) Hybrid modeling of P-SV seismic motion at inhomogeneous viscoelastic topographic structures, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **87**, 1305-1323
- Mossessian T.K. & M. Dravinski (1989) Scattering of elastic waves by three-dimensional surface topographies, *Wave Motion*, **11**, 579-592
- Ohminato T. & B.A. Chouet (1997) A free-surface boundary condition for including 3D topography in the Finite-Difference method, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **87**, 494-515
- Olsen K.B., R.J. Archuleta & J.R. Matarese (1995) Three-dimensional simulation of a magnitude 7.75 earthquake on the San Andreas fault, *Science*, **270**, 1628-1632
- Pedersen H.A., V. Maupin & M. Campillo (1996) Wave diffraction in multilayered media with the Indirect Boundary Element Method: application to 3-D diffraction of long-period surface waves by 2-d lithospheric structures, *Geophys. J. Int.*, **125**, 545-558
- Peirce A. & E. Siebrits (1997) Stability analysis and design of time-stepping schemes for general elastodynamics boundary element models, *Int. J. Num. Meth. in Engineering*, **40**, 319-342
- Rice J.M. & M.H. Sadd (1984) Propagation and scattering of SH-waves in semi-infinite domains using a time-dependent Boundary Element Method, *J. Appl. Mech.*, **51**, 641-645
- Rynne B.P. (1985) Stability and convergence of time marching methods in scattering problems, *IMA J. Appl. Math.*, **35**, 297-310
- Sánchez-Sesma F.J. & M. Campillo (1991), Diffraction of P, SV, and Rayleigh waves by topographic features: a boundary integral formulation, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **81**, 2234-2253
- Sánchez-Sesma F.J. & F. Luzón (1995) Seismic response of three-dimensional alluvial



valleys for incident P, S, and Rayleigh waves, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **85**, 269-284

Sánchez-Sesma F.J., A. Pech-Perez, R. Madariaga & K. Irikura An approximate elastic Green's function for a constant-gradient heterogeneous medium, *submitted to Geophys. J. Int.*, October 1998

Takemiya H. & A. Fujiwara (1994) SH-Wave scattering and propagation analyses at irregular sites by time domain BEM, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **84**, 1443-1455

Yokoi T. & F.J. Sánchez-Sesma (1998) A hybrid calculation technique of the Indirect Boundary Element Method and the analytical solutions for three-dimensional problems of topography, *Geophys. J. Int.*, **133**, 121-139

## Chapitre 3

### Fonctions de Green des milieux à gradient de vitesse constant (3D)

Comme il a déjà été évoqué précédemment, une des limitations des méthodes d'éléments de frontière, par rapport à d'autres méthodes, vient du choix limité des fonctions de Green à notre disposition. En pratique, nous sommes obligés de considérer des milieux homogènes par morceaux, ce qui limite fortement le champ des applications. Même si les hétérogénéités des milieux géologiques sont en général assez mal connues, on peut souvent en première approximation considérer une variation linéaire des paramètres élastiques selon une seule direction. Il serait donc utile de disposer de fonctions de Green valables dans de tels milieux.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la possibilité d'utiliser des expressions analytiques approchées des fonctions de Green, valables dans des milieux hétérogènes à gradient de vitesse constant. Les paramètres élastiques des milieux considérés varient en fonction de la profondeur  $z$  de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \alpha(z) &= \alpha_0 \left( \frac{h+z}{h+z_0} \right) = (h+z) |\vec{\nabla} \alpha| & \beta(z) &= \beta_0 \left( \frac{h+z}{h+z_0} \right) = (h+z) |\vec{\nabla} \beta| \\ \rho(z) &= \rho_0 \left( \frac{h+z}{h+z_0} \right)^\nu & \nu &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Les paramètres de Lamé sont reliés aux vitesses  $\alpha$  et  $\beta$  et à la masse volumique  $\rho$  par les relations:

$$\mu = \rho \beta^2 = \mu_0 \left( \frac{h+z}{h+z_0} \right)^{\nu+2} \quad \text{et} \quad \lambda = \rho(\alpha^2 - 2\beta^2) = \lambda_0 \left( \frac{h+z}{h+z_0} \right)^{\nu+2} \quad (3.2)$$

De tels milieux peuvent, par exemple, constituer une première approximation des hétérogénéités qui se rencontrent dans la croûte. Dans un édifice volcanique, le gradient



de vitesse observé serait plutôt perpendiculaire à la topographie, du fait de l'empilement des couches successives.

L'idée, proposée par Sánchez-Sesma et al. (1999 a), dans le cas 2D, est de formuler une solution heuristique, constituant une extension de la solution analytique donnée par la théorie asymptotique des rais, et s'inspirant de l'expression du champ de déplacement total en milieu homogène pour définir les termes complémentaires de champ proche.

### 3.1 Milieux hétérogènes à gradient de vitesse constant

Une propriété intéressante des milieux à gradient de vitesse constant est que l'équation de l'éikonal y admet une solution analytique simple: les rais sont des cercles contenus dans un plan vertical et les front d'ondes sont des sphères centrées sur un axe vertical passant par la source (Beydoun and Ben-Menahem, 1985). L'annexe 3.A détaille la géométrie et les paramètres de la solution. Cette particularité, en même temps qu'elle nous donne une expression analytique simple des trajectoires des rais sismiques, fournit le système de coordonnées curvilignes le plus adapté au problème: ce sont les coordonnées bisphériques. Les coordonnées  $(\xi, j_0, \phi)$  qui représentent un point de l'espace dans le système bisphérique s'interprètent de la manière suivante:  $\xi$  est une grandeur sans dimension qui caractérise un front d'onde ( $\xi \equiv \tau_p |\vec{\nabla}\alpha| = \tau_s |\vec{\nabla}\beta|$ , où  $\tau_p$  et  $\tau_s$  sont respectivement les temps de propagation des premières arrivées des ondes P et S le long du rai),  $j_0$  est l'angle d'émission du rai par rapport à la verticale (orientée vers le bas) et  $\phi$  est l'azimut du rai. Une telle paramétrisation est possible du fait de l'absence de caustiques: un point de l'espace est caractérisé de façon unique comme l'intersection d'un rai et d'un front d'onde.

La deuxième propriété intéressante de ces milieux est le découplage exact des ondes S et des ondes P (Hook, 1961; Hook, 1962c). Cela signifie que l'équation des ondes élastodynamiques peut être séparée en trois équations indépendantes portant sur trois potentiels distincts.

Ce découplage apparaît à la condition que

$$\gamma \equiv \frac{\alpha^2}{\beta^2} = 2 \frac{\nu + 3}{\nu + 2} \quad (3.3)$$

Pour  $\sigma = 0.25$ , une valeur courante du coefficient de poisson, le découplage a lieu quand  $\nu = 0$ , c'est à dire pour une masse volumique  $\rho$  ne dépendant pas de la profondeur  $z$ .

Dans le cas d'un milieu hétérogène quelconque, cette propriété de découplage utilisée dans la théorie des rais, n'apparaît qu'avec l'approximation haute fréquence.

### 3.2 Fonctions de Green approchées

Une façon de déterminer des expressions approchées des fonctions de Green, proposée par Francisco Sánchez-Sesma et al. (1999 a), consiste à modifier les expressions des fonctions de Green du milieu homogène, de manière à être en accord avec la théorie asymptotique des rais dans l'approximation du champ lointain et des hautes fréquences.

Cette approche prend en compte la déviation du rai (connue analytiquement), ainsi que l'atténuation géométrique (ou coefficient de divergence, voir Ben-Menahem & Singh, 1981). On considère également, comme pour un milieu homogène, qu'il n'y a pas de conversions entre ondes longitudinales et ondes transverses, ce qui n'est en fait vérifié que dans les conditions de haute fréquence (CHF) ou dans les conditions de champ proche (CCP), définies par Ben Menahem & Beydoun (1985) de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \text{CHF:} \quad & \omega \gg \omega_c \equiv \frac{\nu + 1}{2} |\vec{\nabla}\alpha| \\ \text{CCP:} \quad & \frac{\omega}{|\vec{\nabla}\alpha|} \ll \frac{h + z_c}{R_w} = \coth(\xi) \end{aligned} \quad (3.4)$$

NB: les notations utilisées sont celles de l'annexe 3.A, qui décrit en détail les fonctions de Green proposées, ainsi que les expressions analytiques des rais et des fronts d'ondes.

*Remarque:* dans la propriété de découplage entre ondes P et S, mentionnée dans la section précédente (valable en tout point du milieu et quelle que soit la fréquence), P et S désignent des ondes dont les fronts se propagent aux vitesses  $\alpha$  et  $\beta$  respectivement, mais qui ne sont ni longitudinaux ni transverses. Cette propriété n'interdit donc pas les conversions entre mouvements longitudinaux et transverses.

Les fonctions de Green approchées  $\tilde{G}$  proposées par F. Sánchez-Sesma s'expriment très simplement en coordonnées bisphériques:

$$\tilde{G}_{ij} = \frac{\Lambda}{4\pi\rho_0} \{ \delta_{ij} f_2 + \delta_{i1} \delta_{j1} (f_1 - f_2) \} = \frac{\Lambda}{4\pi\rho_0} \begin{pmatrix} f_1 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 & 0 \\ 0 & 0 & f_2 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$



où le coefficient d'atténuation géométrique  $\Lambda$  vaut:

$$\Lambda = \left( \frac{h + z_0}{h + z} \right)^{\frac{\nu+3}{2}} \frac{1}{R_w} \quad (3.6)$$

Les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  s'écrivent en temps:

$$f_1(t) = \frac{1}{\alpha_0^2} \left[ \delta(t - \tau_p) + \frac{2t}{\tau_p^2} [H(t - \tau_p) - H(t - \tau_s)] \right] \quad (3.7)$$

$$f_2(t) = \frac{1}{\beta_0^2} \left[ \delta(t - \tau_s) - \frac{t}{\tau_s^2} [H(t - \tau_p) - H(t - \tau_s)] \right] \quad (3.8)$$

Leurs expressions en fréquence sont:

$$f_1(\omega) = \frac{1}{\alpha_0^2} \left( 1 - \frac{2i}{\omega\tau_p} - \frac{2}{(\omega\tau_p)^2} \right) e^{-i\omega\tau_p} + \frac{1}{\beta_0^2} \left( \frac{2i}{\omega\tau_s} + \frac{2}{(\omega\tau_s)^2} \right) e^{-i\omega\tau_s} \quad (3.9)$$

$$f_2(\omega) = \frac{1}{\alpha_0^2} \left( \frac{i}{\omega\tau_p} + \frac{1}{(\omega\tau_p)^2} \right) e^{-i\omega\tau_p} + \frac{1}{\beta_0^2} \left( 1 - \frac{i}{\omega\tau_s} - \frac{1}{(\omega\tau_s)^2} \right) e^{-i\omega\tau_s} \quad (3.10)$$

Les expressions de  $\tilde{\mathbf{G}}$  en coordonnées cartésiennes sont données dans l'annexe 3.A.

Remarquons que la formulation proposée de ces fonctions de Green est formellement très proche de celle du cas homogène, aussi bien en temps qu'en fréquence. En fait, la forme de l'expression est conservée, avec simplement une correction du terme d'atténuation géométrique et une modification des temps de propagation des fronts d'ondes le long du rai:  $\tau_p$  et  $\tau_s$  remplacent  $r/\alpha$  et  $r/\beta$ .

Les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  s'interprètent très simplement:  $f_1$  est la réponse longitudinale (parallèle à la direction du rai) à une excitation longitudinale (parallèle à la direction d'émission du rai).  $f_2$  est la réponse transverse (perpendiculaire à la direction du rai) à une excitation transverse (perpendiculaire à la direction d'émission du rai), les composantes transverses horizontales et verticales étant découplées.

Les fonctions  $\tilde{\mathbf{G}}$  prennent en compte les termes de champ proche: les "rais" sont alors peu déviés et on se rapproche de la solution en milieu homogène. Elles sont également valides en champ lointain dans l'approximation des hautes fréquences (on retrouve la solution du tracé de rai). Par contre, elles sont a priori moins correctes en champ intermédiaire.

### 3.3 Domaine de validité des fonctions de Green approchées

Une solution analytique exacte pour le champ de déplacement existe dans le cas d'une source explosive de moment  $M_0$ . Elle est donnée par Beydoun & Ben Menahem (1985) (également Hook, 1962c). Cette solution fournit un premier élément de comparaison pour tester le domaine de validité des fonctions de Green  $\tilde{\mathbf{G}}$ . Elle s'écrit, avec les mêmes notations:

$$u_\xi(\omega) = \frac{-M_0}{4\pi\rho_0\alpha_0^2} \Lambda(z, \xi) \frac{i\omega \frac{1}{|\nabla\alpha|} \sqrt{1 - \omega_c^2/\omega^2} - (z_c + h)/R_w}{(z_0 + h)} e^{i\omega\tau\sqrt{1 - \omega_c^2/\omega^2}} \quad (3.11)$$

$$u_z(\omega) = \frac{M_0}{4\pi\rho_0\alpha_0^2} \Lambda(z, \xi) \frac{(\nu + 5)/2}{(z_0 + h)} e^{i\omega\tau\sqrt{1 - \omega_c^2/\omega^2}} \quad (3.12)$$

Pour des raisons de commodité, la solution est donnée dans un système de coordonnées mixtes, non orthogonales, sous la forme d'une composante longitudinale  $u_\xi$  et d'une composante verticale  $u_z$ . Cela permet de constater immédiatement que la solution n'a pas un mouvement purement longitudinal, mais inclut une composante verticale supplémentaire. Cette composante  $u_z$  est négligeable en champ proche (car  $\frac{\nu+5}{2}$  est négligeable devant  $\frac{z_c+h}{R_w}$ ), et également en champ lointain quand on se trouve dans les conditions de haute fréquence (car  $\frac{\nu+5}{2}$  est négligeable devant  $\frac{\omega}{|\nabla\alpha|} \sqrt{1 - \omega_c^2/\omega^2}$ ).

De plus, la solution analytique montre un comportement dispersif. Sa composante de champ lointain est identique à la solution du tracé de rai, mais avec une pulsation modifiée: le terme  $\omega$  est en fait multiplié par un facteur  $\sqrt{1 - \omega_c^2/\omega^2}$ , qui fait effectivement apparaître de la dispersion. A basse fréquence, quand  $\omega < \omega_c$ , l'onde n'est plus progressive mais devient stationnaire.

Beydoun & Ben Menahem (1985) ont analysé précisément les limites de validité des conditions de champ lointain et de haute fréquence pour l'utilisation des méthodes de tracé de rai dynamique et du faisceau gaussien. La solution approchée  $\tilde{\mathbf{G}}$  que nous étudions ici est en fait une amélioration du tracé de rai dynamique, dans le cas particulier d'un milieu à gradient de vitesse constant, qui permet d'intégrer un terme de champ proche supplémentaire, mais ne prend pas en compte la dispersion. Les CHF sont donc a priori les mêmes que celles du tracé de rai dynamique. En suivant Beydoun & Ben Menahem (1985), on obtient comme domaine de validité en fréquence:  $\omega > 7 \omega_c$ .



### 3.3.1 Tests de validité

Soit un milieu à gradient de vitesse constant, dans lequel la masse volumique est constante ( $\nu = 0$ ). D'après la condition de découplage 3.3, on obtient  $\beta = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}$ . La Figure 3.1 montre la trajectoire des rais sismiques dans un tel milieu, pour une vitesse  $\alpha = 6000$  m.s<sup>-1</sup> en  $z=0$  et une source en  $z=-50$  km, pour différentes valeurs du gradient de vitesse.

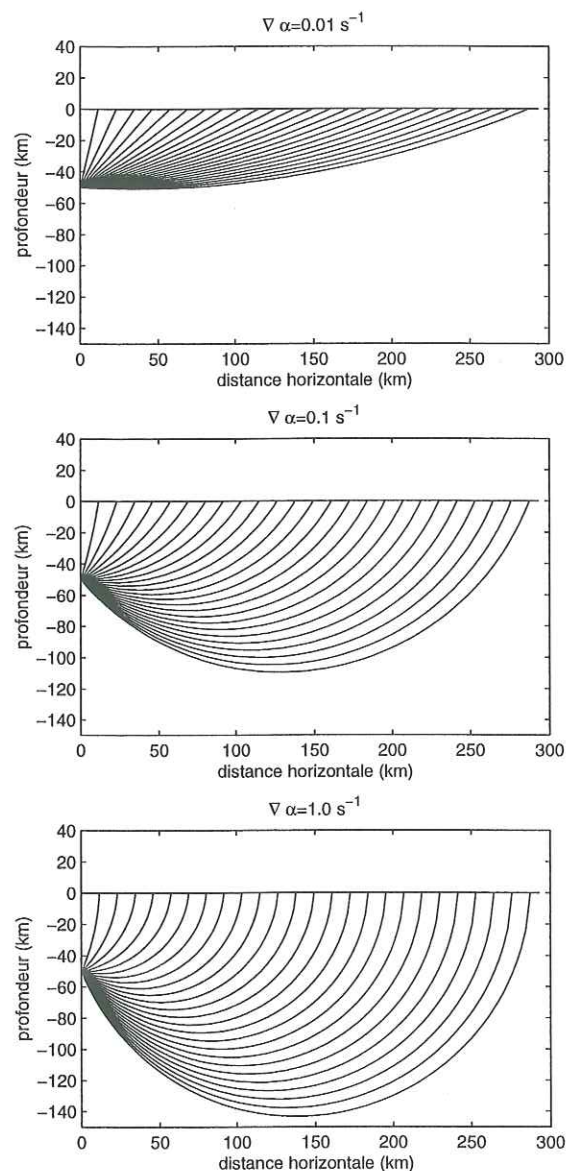


FIG. 3.1 – Trajectoires des rais associés à une source située à  $z=-50$  km, pour différentes valeurs du gradient de vitesse  $|\vec{\nabla}\alpha|$ , avec  $\sigma = 0.25$  et  $\alpha(0) = 6000$  m.s<sup>-1</sup>

La ligne de récepteurs est située à l'altitude  $z=0$ . Il faut bien noter que cette ligne de récepteurs ne représente pas une surface libre et que le milieu considéré est virtuellement

infini: le champ d'onde calculé comprend uniquement les ondes incidentes.

Les Figures 3.2, 3.3 et 3.4 comparent, dans le domaine des fréquences, la solution analytique pour une source explosive et celle obtenue en dérivant numériquement les fonctions de Green approchées  $\tilde{\mathbf{G}}$  (grâce à  $u_i = \tilde{G}_{ij,j} M_0$ ), pour différentes valeurs du gradient de vitesse.

Pour augmenter la lisibilité de la représentation graphique, on montre les parties réelles et imaginaires, plutôt que l'amplitude et la phase du signal.

On s'aperçoit sur ces figures que pour la modélisation de signaux ayant quelques secondes de période, on ne peut considérer, en utilisant les tenseurs  $\tilde{\mathbf{G}}$ , des milieux ayant un gradient de vitesse supérieur à environ  $0.1$  s<sup>-1</sup>. En prenant  $|\vec{\nabla}\alpha| = 0.1$  s<sup>-1</sup> comme gradient de vitesse pour les ondes P, la fréquence de coupure est  $f_c = \frac{\nu+1}{2} \frac{|\vec{\nabla}\alpha|}{2\pi} = 0.8 \cdot 10^{-2}$  Hz. Le domaine de validité des fonctions  $\tilde{\mathbf{G}}$  correspond donc à peu près à  $\omega > 20 \omega_c$ .

La condition de champ proche n'a par contre pas une incidence très importante sur la précision de l'estimation des fonctions de Green.

La Figure 3.5 permet de plus de constater effectivement que le tracé de rai dynamique évalue moins bien le champ proche que les fonctions  $\tilde{\mathbf{G}}$ . Ces dernières représentent donc une amélioration importante dans ces conditions.

L'interprétation de cette observation est la suivante: en champ proche, les trajectoires peuvent quasiment être assimilées à des droites et le milieu à un milieu homogène. Les fonctions de Green pour un milieu homogène peuvent donc être employées, alors qu'en champ lointain l'approximation du tracé de rai est utilisable. Les fonctions  $\tilde{\mathbf{G}}$  proposées par Sánchez-Sesma ne font finalement que combiner ces deux approches.

Pour mieux se rendre compte des différences entre les solutions données par les deux méthodes, il est intéressant d'examiner le déplacement calculé sous la forme d'un polarigramme (Figure 3.6). Cela permet de mieux évaluer les différences de polarisation: la solution approchée  $\tilde{\mathbf{G}}$  donne un déplacement purement longitudinal, à polarisation fixe dans le temps (pour une source explosive), alors que la solution analytique exacte montre clairement une variation de la polarisation au cours du temps.

### 3.3.2 Cas réels

La vitesse des ondes P dans la croûte passe de  $5.8$  à  $6.8$  km.s<sup>-1</sup> entre  $3$  km et  $24$  km de profondeur (Lay & Wallace, 1995). Le gradient de vitesse dans la croûte est donc



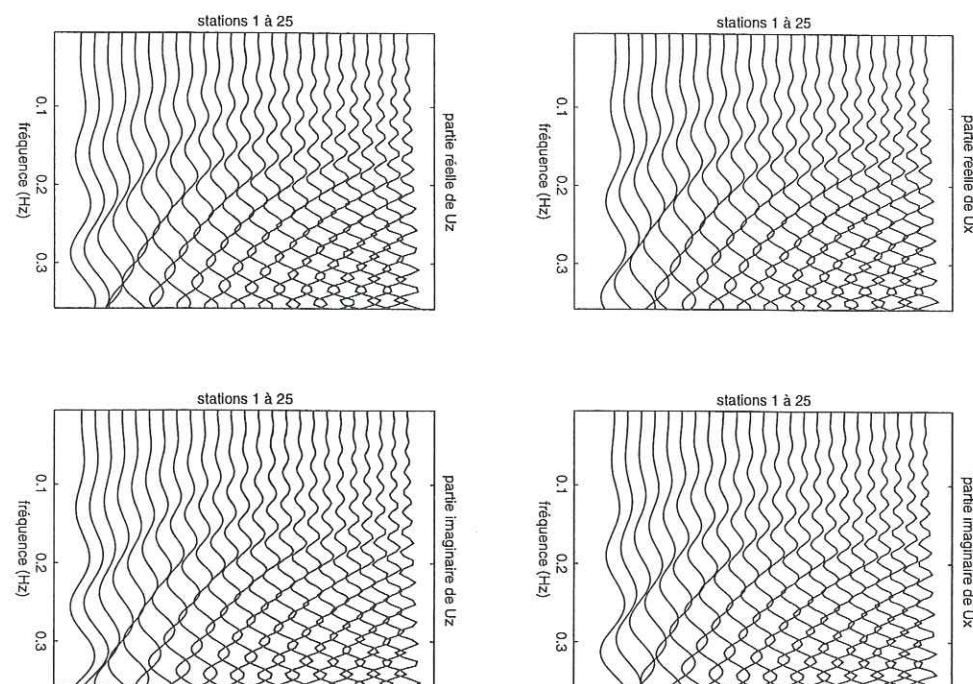


FIG. 3.2 – Comparaison, dans le domaine spectral, des déplacements horizontaux ( $U_x$ ) et verticaux ( $U_z$ ) dus à une source explosive isotrope 50 km sous la ligne de capteurs, obtenus analytiquement (tirets) et par différentiation numérique des fonctions  $\tilde{G}$  (lignes continues). Le milieu a un gradient de vitesse  $|\vec{\nabla}\alpha| = 0.01 \text{ s}^{-1}$  et  $\alpha(0) = 6000 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $\sigma = 0.25$ ,  $\rho = 3000 \text{ kg.m}^{-3}$ . L'espacement entre chaque récepteur est de 10 km et le premier capteur (trace du bas) est situé au-dessus de la source (voir Figure 3.1).

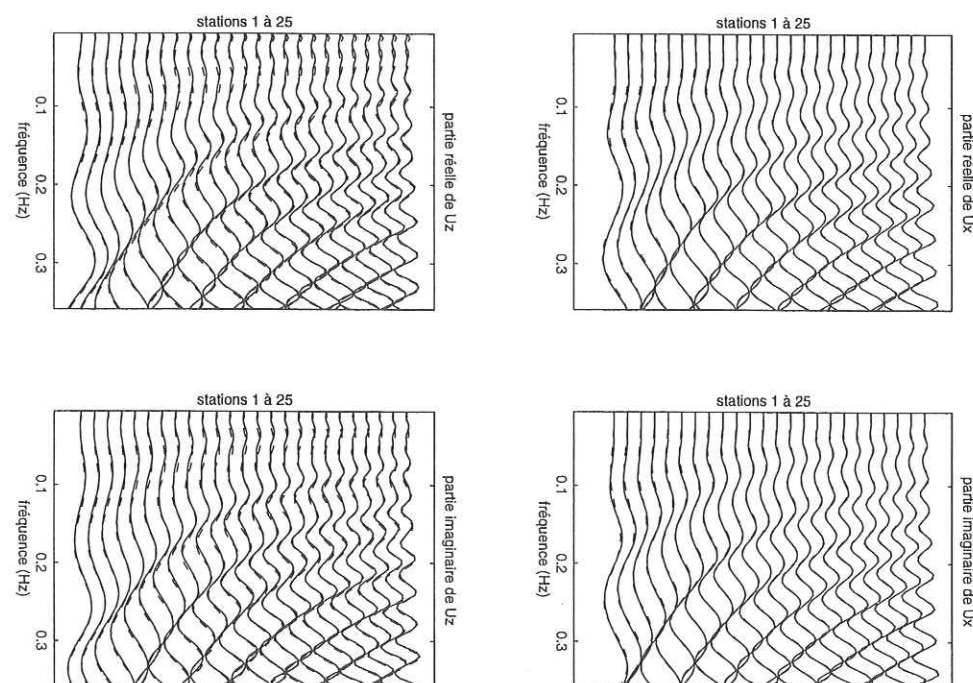


FIG. 3.3 – Mêmes caractéristiques que la Figure 3.2, mais avec  $|\vec{\nabla}\alpha| = 0.1 \text{ s}^{-1}$ .

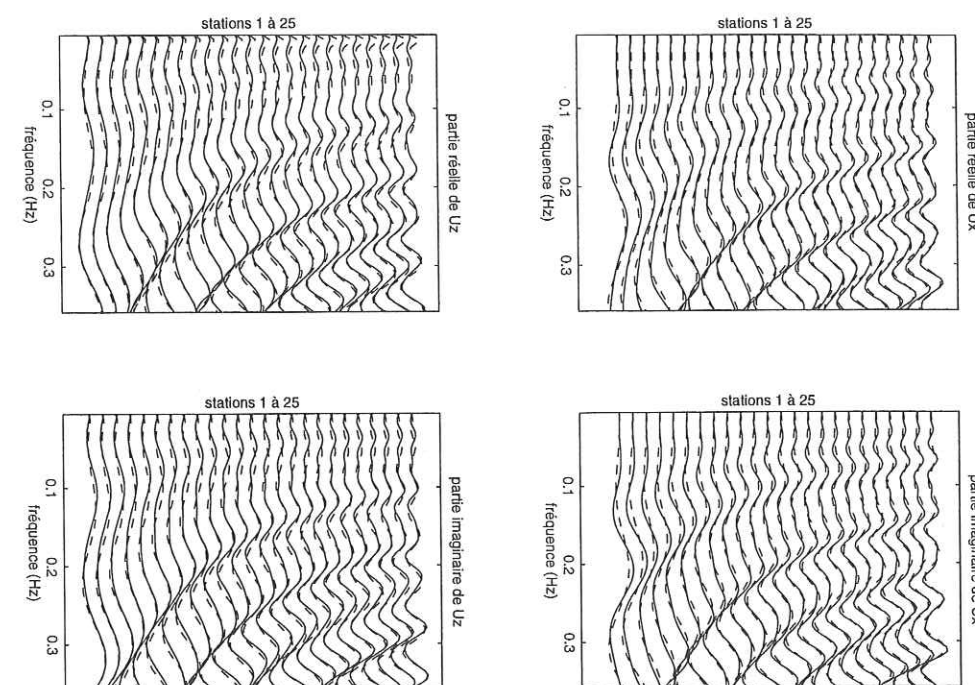


FIG. 3.4 – Mêmes caractéristiques que la Figure 3.2, mais avec  $|\vec{\nabla}\alpha| = 0.2 \text{ s}^{-1}$ .

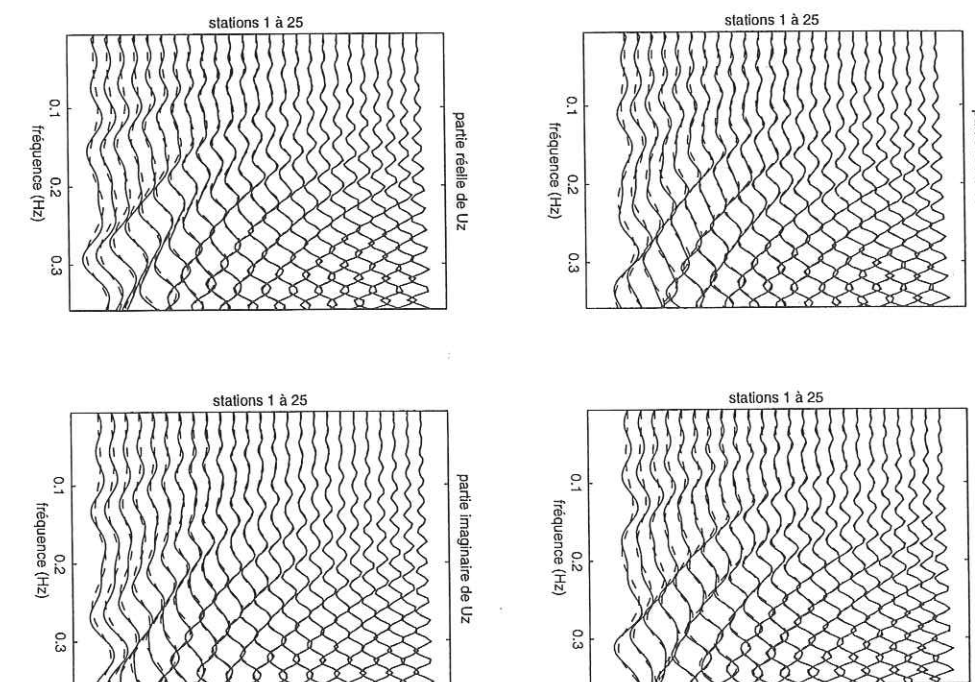


FIG. 3.5 – Comparaison, pour  $|\vec{\nabla}\alpha| = 0.01 \text{ s}^{-1}$ , de la solution du tracé de rai dynamique (tirets) avec la solution analytique exacte (traits pleins). On peut remarquer que l'ajustement est nettement moins bon, pour les capteurs les plus proches, qu'en utilisant les fonctions  $\tilde{G}$  (Figure 3.3)



d'environ  $0.05 \text{ s}^{-1}$ . D'autre part, la masse volumique est choisie constante ( $\nu = 0$ ). Alors:

$$\begin{aligned} CHF &\Leftrightarrow \omega > 20 \omega_c \\ &\Leftrightarrow f > 0.08 \text{ Hz} \\ &\Leftrightarrow T < 12.5 \text{ s} \end{aligned} \quad (3.13)$$

On peut donc, pour un tel gradient de vitesse, modéliser correctement les ondes ayant des périodes inférieures à environ 12.5 s.

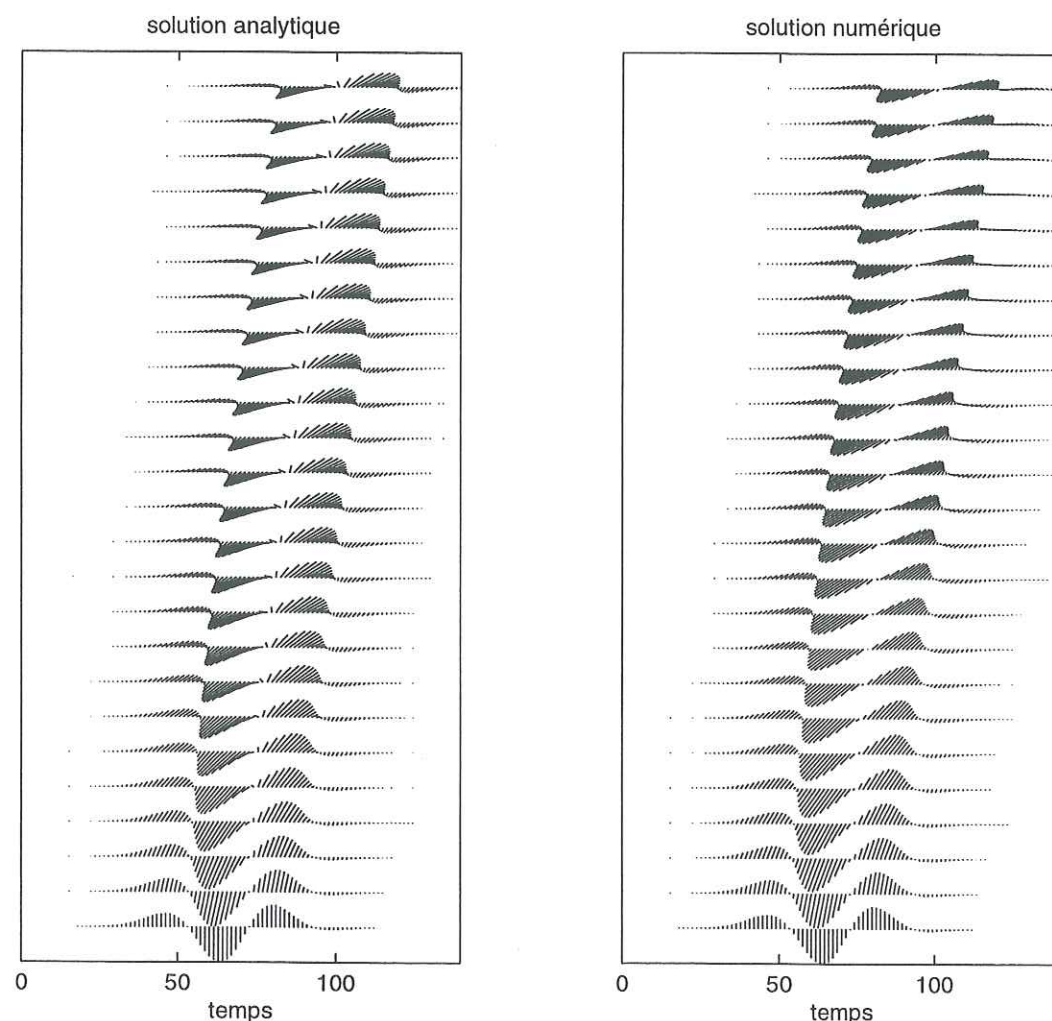


FIG. 3.6 – Polarigrammes obtenus sur une ligne de 25 récepteurs, espacés de 10km, pour un gradient de vitesse  $|\vec{\nabla}\alpha| = 0.01 \text{ s}^{-1}$ . (mêmes conditions que pour la Figure 3.2). Comparaison de la solution analytique exacte avec la solution approchée. La fonction source est un Ricker de période centrale 48 s. Les amplitudes sont normalisées par trace.

Par contre, dans les couches superficielles de certains volcans, des gradients beaucoup plus importants sont observés: on relève des variations de la vitesse des ondes P allant

jusqu'à  $3 \text{ km.s}^{-1}$  en 300 m (Ferrazzini et al. (1991) à Hawaï, Chouet et al. (1998) au Stromboli). Cela correspond à  $|\vec{\nabla}\alpha| = 10 \text{ s}^{-1}$  et les fonctions de Green  $\tilde{\mathbf{G}}$  ne peuvent alors s'appliquer qu'aux ondes ayant des fréquences supérieures à quelques dizaines de Hertz, ce qui ne correspond pas à notre ambition, qui est de modéliser le signal large bande.

### 3.4 Essais d'amélioration des fonctions de Green approchées

Dans le cadre des méthodes d'éléments de frontière, même si on ne peut négliger les termes de champ lointain, les contributions les plus fortes des fonctions de Green proviennent du champ proche. C'est également la partie qui est la mieux évaluée par  $\tilde{\mathbf{G}}$ . Par contre, pour le calcul du champ incident, le déplacement doit pouvoir être calculé également en champ lointain. De plus, dans tous les cas, les basses fréquences sont mal modélisées.

Une première idée pour mieux prendre en compte la dispersion à basse fréquence était d'introduire heuristiquement cette dispersion dans les fonctions de Green en utilisant le facteur correctif  $(1 - \omega_c^2/\omega^2)^{1/2}$  pour  $\omega$ , observé dans la solution analytique pour l'explosion. Ceci aurait éventuellement permis de s'affranchir du critère de haute fréquence. Malheureusement, cette correction, un peu simple, ne permet pas de modéliser correctement les basses fréquences.

Nous avons examiné, une autre façon d'apporter des améliorations aux fonctions de Green  $\tilde{\mathbf{G}}$  proposées ci-dessus, en repartant d'une décomposition du champ d'onde proposées par Hooke et différente de la décomposition de Helmholtz, qui permet de faire apparaître le découplage des ondes P et S dans les milieux à gradient de vitesse constant.

Cette étude, qui n'a finalement pas pu permettre de proposer une alternative intéressante, est détaillée dans l'annexe 3.C.

### 3.5 Solution en contrainte

La méthode des éléments de frontières, dans sa formulation directe, nécessite de connaître non seulement les fonctions de Green en déplacement  $\tilde{\mathbf{G}}$ , mais également les fonctions de Green en contrainte  $\tilde{\mathbf{\Sigma}}$ . Dans le cas de la surface libre, ce sont même uniquement ces dernières qui nous sont utiles.



Pour les obtenir, nous appliquons la loi de Hooke, écrite dans le système de coordonnées bisphériques (voir l'annexe 3.B). Son expression a la même forme qu'en coordonnées cartésiennes (Aki & Richards, 1980, p34):

$$\begin{aligned}\tilde{\Sigma}_{ijk} &= \rho(\alpha^2 - 2\beta^2)\delta_{ik}\tilde{G}_{lj,l} + \rho\beta^2(\tilde{G}_{ij,k} + \tilde{G}_{kj,i}) \\ &= \left(\frac{h+z}{h+z_0}\right)^{\nu+2} \left[\rho_0(\alpha_0^2 - 2\beta_0^2)\delta_{ik}\tilde{G}_{lj,l} + \rho_0\beta_0^2(\tilde{G}_{ij,k} + \tilde{G}_{kj,i})\right]\end{aligned}\quad (3.14)$$

Les expressions analytiques de  $\tilde{\Sigma}_{ijk}$  que nous avons dérivées sont données dans l'annexe 3.A. Elles ont été testées numériquement, en effectuant la comparaison avec les résultats obtenus par différentiation numérique des fonctions  $\tilde{G}_{ij}$ , ce qui a permis de les valider.

Dans l'expression complète du tenseur des contraintes, un terme apparaît, qui a une limite nulle quand le milieu tend vers un milieu homogène (i.e. le gradient de vitesse tend vers 0). Ce terme (noté  $J$ ) peut être négligé dans les conditions de validité des fonctions  $\tilde{G}$ . Les fonctions de Green en contrainte sont alors plus simples, et s'écrivent:

$$\begin{aligned}\tilde{\Sigma}_{ijk} &= \left(\frac{h+z}{h+z_0}\right)^{\frac{\nu-1}{2}} \frac{1}{4\pi R_w} \left[ \delta_{j1}\delta_{i1}\delta_{k1}F_1 + \delta_{j1}(\delta_{i2}\delta_{k2} + \delta_{i3}\delta_{k3})F_3 \right. \\ &\quad \left. + \delta_{j2}(\delta_{i2}\delta_{k1} + \delta_{i1}\delta_{k2})F_2 + \delta_{j3}(\delta_{i3}\delta_{k1} + \delta_{i1}\delta_{k3})F_2 \right] \\ &= \left(\frac{h+z}{h+z_0}\right)^{\frac{\nu-1}{2}} \frac{1}{4\pi R_w} \begin{pmatrix} \delta_{j1}F_1 & \delta_{j2}F_2 & \delta_{j3}F_2 \\ \delta_{j2}F_2 & \delta_{j1}F_3 & 0 \\ \delta_{j3}F_2 & 0 & \delta_{j1}F_3 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (3.15)$$

Ces fonctions de Green approchées  $\tilde{\Sigma}$  pour les milieux à gradient constant ont été implémentées et utilisées dans la méthode d'éléments de frontières développée aux chapitres précédents, pour des gradients de vitesse faibles.

On montre sur la Figure 3.7 la comparaison, pour une onde plane S verticale incidente sur une topographie gaussienne, entre les sismogrammes obtenus pour un milieu homogène (à vitesse des ondes P:  $\alpha = 3200 \text{ m.s}^{-1}$ ) et pour un milieu ayant un gradient de vitesse constant  $|\vec{\nabla}\alpha| = 3 \text{ s}^{-1}$ , avec  $\alpha(0) = 3200 \text{ m.s}^{-1}$ . La fonction source est une ondelette de Ricker de fréquence centrale  $f_0 = 10.3 \text{ Hz}$ . La fréquence de coupure valant  $f_c = \frac{|\vec{\nabla}\alpha|}{4\pi} = 0.24 \text{ Hz}$ , notre choix de la fréquence  $f_0$  nous place dans les conditions de haute fréquence. Les principales modifications observées par rapport à la propagation en milieu homogène se situent au niveau des temps d'arrivée de l'onde incidente et de la vitesse de propagation des ondes de Rayleigh. Les amplitudes ne sont pas tellement affectées. Nous avons essayé de comparer nos résultats avec la méthode de réflectivité en nombres d'onde discrets, mais cette dernière ne permettait pas, même en prenant un nombre de couches suffisamment

important, de modéliser un milieu à gradient constant: des conversions P-S apparaissent dans tout les cas.

### 3.6 Conclusion

Finalement, les fonctions de Green développées ne sont pas utilisables pour des modèles réalistes, si l'on veut effectuer une modélisation basse fréquence. Les gradients de vitesse qui peuvent être modélisés ne dépassent pas la valeur  $|\vec{\nabla}\alpha|_{max} = \frac{\omega}{10(\nu+1)}$ , ce qui correspond à environ  $60 \text{ m.s}^{-1}$  par kilomètre (vitesse des P), pour une onde de période 10 s.

Pour les fréquences plus élevées, respectant la condition de haute fréquence  $\omega > 20 \omega_c$ , une comparaison avec une autre méthode numérique serait intéressante.



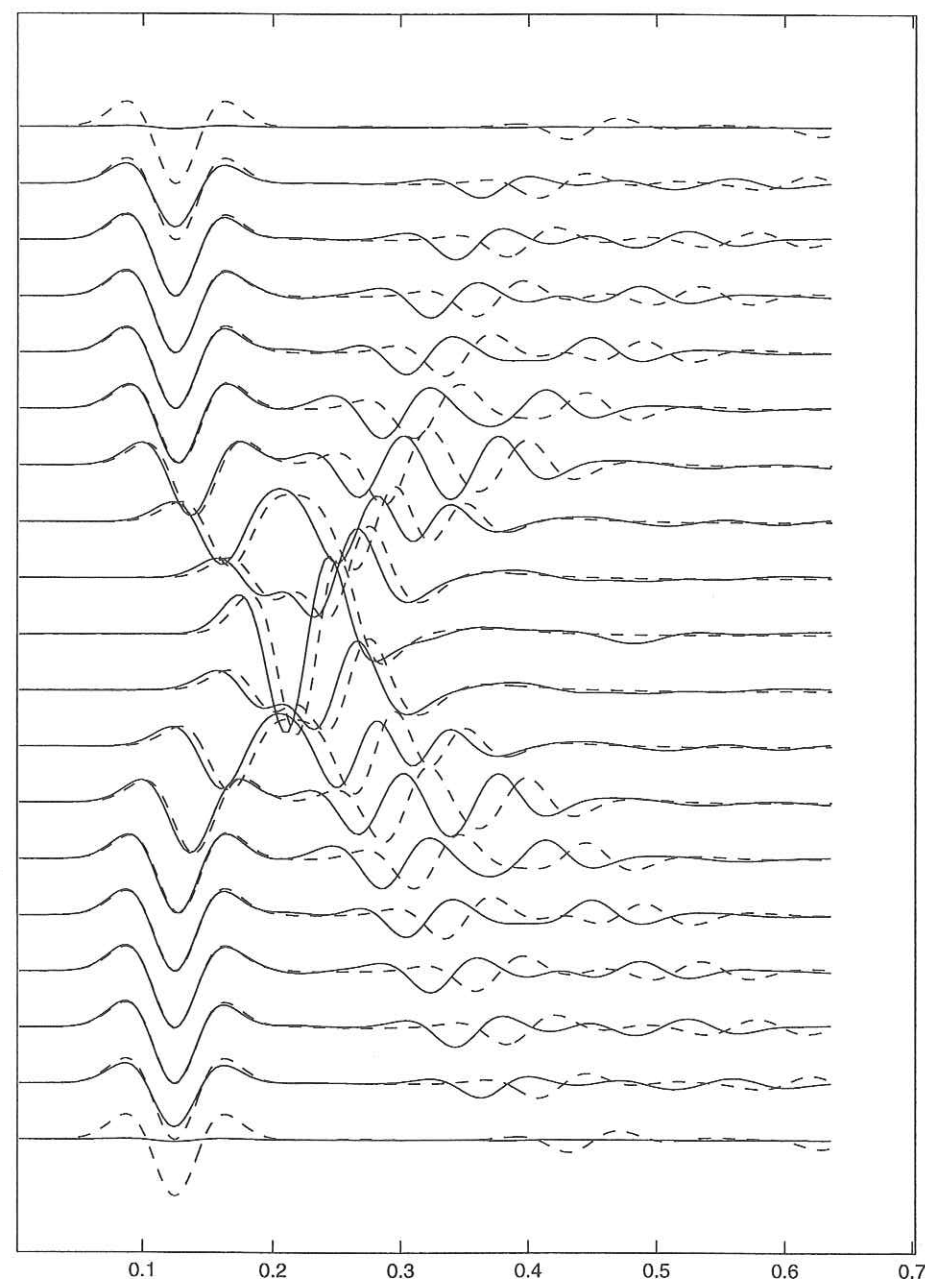


FIG. 3.7 – Onde plane  $S$  à incidence verticale sur une topographie gaussienne (voir Figure 2.4 du chapitre 2). En traits pleins, les sismogrammes obtenus avec un milieu à gradient de vitesse constant  $|\vec{\nabla}\alpha| = 3 \text{ s}^{-1}$ . En tirets, les sismogrammes obtenus pour un milieu homogène  $\alpha = 3200 \text{ m.s}^{-1}$  (ce sont ceux de la figure 2.4). Les différences d'amplitudes observées sur les traces du bords sont dues à une apodisation différentes pour les deux calculs.

## Annexe 3.A: Fonctions de Green approchées

### Rais et des fronts d'ondes

Nous récapitulons ici les propriétés géométriques des rais et fronts d'ondes dans un milieu à gradient constant, décrit par les équations (1.1), telles qu'elles sont données par Beydoun & Ben Menahem (1985).

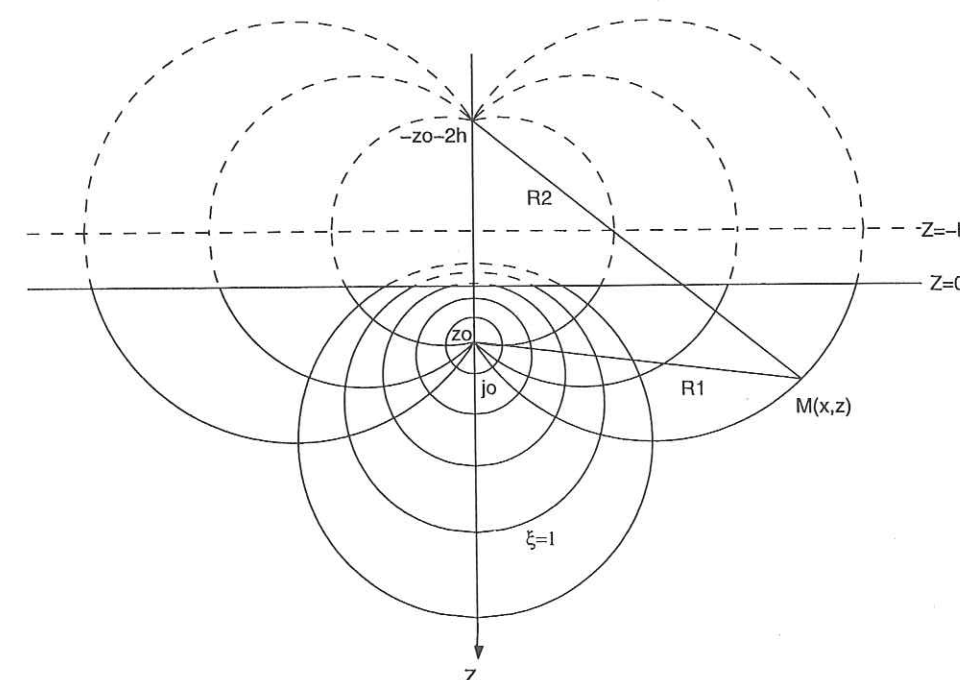


FIG. 3.8 – Rais et front d'ondes dans un milieu à gradient de vitesse constant

Dans un repère orthonormal où l'axe  $(Oz)$  est vertical et orienté vers le bas, nous considérons une source ponctuelle placée en  $(0,0,z_0)$ .

Nous considérons uniquement le domaine  $z > 0$ , mais  $z = 0$  n'est pas une surface libre et nous restreignons simplement le milieu de façon à rester dans les conditions  $\alpha, \beta, \rho > 0$ . Les fonctions de Green  $\tilde{G}$  proposées ne contiendront donc que les ondes directes et en aucun cas des réfléchies ou des ondes de surface. Remarquez que la surface  $z=-h$  correspond à une vitesse nulle, mais n'est pas pour autant un point singulier pour les rais: simplement elle est atteinte au bout d'un temps infini, et représente donc le front d'onde à  $t = \infty$



Les trajectoires des rais sismiques, solutions de l'équation de l'éikonal

$$(\nabla\tau)^2 = \frac{1}{c(z)^2} \quad (3.16)$$

sont des cercles contenus dans le plan vertical passant par la source et le récepteur, centrés en  $(r_c \cos \phi, r_c \sin \phi, -h)$  et de rayon  $R$ . On montre que:

$$r_c = (z_0 + h) \cot j_0 \quad (3.17)$$

et

$$R = \frac{z_0 + h}{\sin j_0} \quad (3.18)$$

Les fronts d'onde, quant à eux, sont des sphères centrées en  $(0, 0, z_c)$  et de rayon  $R_w$ . On a

$$z_c + h = (z_0 + h) \cosh \xi \quad (3.19)$$

et

$$R_w = (z_0 + h) \sinh \xi \quad (3.20)$$

La valeur de  $\xi$  en un point de l'espace est donnée par  $\xi = 2 \tanh^{-1} \left( \frac{R_1}{R_2} \right)$ , où  $R_1$  et  $R_2$  sont les distances indiquées sur la Figure 3.8.

$$R_1 = \sqrt{x^2 + (z - z_0)^2} \quad R_2 = \sqrt{x^2 + (z + z_0 + 2h)^2} \quad (3.21)$$

Les temps de propagation source-récepteur le long des rais pour les ondes P et S sont respectivement:

$$\tau_p = \frac{1}{|\nabla\alpha|} \xi \quad (3.22)$$

et

$$\tau_s = \frac{1}{|\nabla\beta|} \xi \quad (3.23)$$

D'autres relations intéressantes donnent l'angle d'incidence  $j$  du rai en un point quelconque, ainsi que son angle d'émergence  $j_0$  à la source:

$$\sin(j_0) = \frac{2R_H(z_0 + h)}{R_1 R_2} \quad \text{et} \quad \sin(j) = \frac{2R_H(z + h)}{R_1 R_2} = \frac{\alpha(z)}{\alpha_0} \sin(j_0) \quad (3.24)$$

où  $R_H = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Enfin, trois autres formules utiles:

$$R_w = \frac{R_1 R_2}{2(h + z)}, \quad R = \frac{R_1 R_2}{2R_H} \quad \text{et} \quad \coth(\xi) = \frac{R_1^2 + R_2^2}{2R_1 R_2} \quad (3.25)$$

## Fonctions de Green approchées en déplacement

Nous rappelons ici les expressions des fonctions de Green approchées  $\tilde{G}$  proposées par Francisco Sánchez-Sesma en coordonnées bisphériques (équations 3.5 à 3.10) puis nous donnons leur expressions en coordonnées cartésiennes:

$$\tilde{G}_{ij} = \frac{\Lambda}{4\pi\rho_0} \{ \delta_{ij} f_2 + \delta_{i1} \delta_{j1} (f_1 - f_2) \} = \frac{\Lambda}{4\pi\rho_0} \begin{pmatrix} f_1 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 & 0 \\ 0 & 0 & f_2 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

avec un coefficient d'atténuation géométrique  $\Lambda$  valant:

$$\Lambda = \left( \frac{h + z_0}{h + z} \right)^{\frac{\nu+3}{2}} \frac{1}{R_w} \quad (3.6)$$

Les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  s'écrivent en temps:

$$f_1(t) = \frac{1}{\alpha_0^2} \left[ \delta(t - \tau_p) + \frac{2t}{\tau_p^2} [H(t - \tau_p) - H(t - \tau_s)] \right] \quad (3.7)$$

$$f_2(t) = \frac{1}{\beta_0^2} \left[ \delta(t - \tau_s) - \frac{t}{\tau_s^2} [H(t - \tau_p) - H(t - \tau_s)] \right] \quad (3.8)$$

En fréquence, elles deviennent:

$$f_1(\omega) = \frac{1}{\alpha_0^2} \left( 1 - \frac{2i}{\omega\tau_p} - \frac{2}{(\omega\tau_p)^2} \right) e^{-i\omega\tau_p} + \frac{1}{\beta_0^2} \left( \frac{2i}{\omega\tau_s} + \frac{2}{(\omega\tau_s)^2} \right) e^{-i\omega\tau_s} \quad (3.9)$$

$$f_2(\omega) = \frac{1}{\alpha_0^2} \left( \frac{i}{\omega\tau_p} + \frac{1}{(\omega\tau_p)^2} \right) e^{-i\omega\tau_p} + \frac{1}{\beta_0^2} \left( 1 - \frac{i}{\omega\tau_s} - \frac{1}{(\omega\tau_s)^2} \right) e^{-i\omega\tau_s} \quad (3.10)$$

En coordonnées cartésiennes, l'expression de  $\tilde{G}_{ij}$  s'écrit sous la forme:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{ij} &= \frac{\Lambda}{4\pi\rho_0} \{ (P^T P_0)_{ij} f_2 + \gamma_i \gamma_j^0 (f_1 - f_2) \} \\ &= \frac{\Lambda}{4\pi\rho_0} \left\{ (3\gamma_i \gamma_j^0 - (P^T P_0)_{ij}) \frac{1}{s^2} \int_{\tau_p}^{\tau_s} \tau \delta(t - \tau) d\tau \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\alpha_0^2} \gamma_i \gamma_j^0 \delta(t - \tau_p) - \frac{1}{\beta_0^2} (\gamma_i \gamma_j^0 - (P^T P_0)_{ij}) \delta(t - \tau_s) \right\} \end{aligned} \quad (3.26)$$

où l'on définit  $s = \alpha_0 \tau_p = \beta_0 \tau_s = (h + z_0) \xi$

$\vec{\gamma}^0$  et  $\vec{\gamma}$  sont les vecteurs directeurs du rai à la source et au récepteur.



$P_0$  et  $P$  sont les matrices de passage des coordonnées cartésiennes au coordonnées bisphériques, respectivement à la source et au récepteur.

Elles s'écrivent:

$$P = \begin{pmatrix} \vec{e}_\xi \\ \vec{e}_j \\ \vec{e}_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(j) \cos(\phi) & \sin(j) \sin(\phi) & \cos(j) \\ \cos(j) \cos(\phi) & \cos(j) \sin(\phi) & -\sin(j) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Pour obtenir  $P_0$ , on remplace  $j$  par  $j_0$ .

Nous obtenons finalement l'expression de  $P^T P_0$  suivante:

$$P^T P_0 = \begin{pmatrix} \sin^2 \phi + \cos(j - j_0) \cos^2 \phi & (\cos(j - j_0) - 1) \cos \phi \sin \phi & \cos \phi \sin(j - j_0) \\ (\cos(j - j_0) - 1) \cos \phi \sin \phi & \cos^2 \phi + \cos(j - j_0) \sin^2 \phi & \sin \phi \sin(j - j_0) \\ -\cos \phi \sin(j - j_0) & -\sin \phi \sin(j - j_0) & \cos(j - j_0) \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

### Fonctions de Green approchées en contrainte

Après un processus de dérivation en coordonnées curvilignes bisphériques (décrit dans l'annexe 3.B), l'application de la loi de Hooke donne le tenseur suivant (exprimé dans ces coordonnées bisphériques):

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}_{ijk} = & \left( \frac{h+z}{h+z_0} \right)^{\frac{\nu-1}{2}} \frac{1}{4\pi R_w} \left[ \right. \\ & \delta_{j1} \begin{pmatrix} F_1 & cf_1 & 0 \\ cf_1 & F_3 & 0 \\ 0 & 0 & F_3 \end{pmatrix} \\ & + \delta_{j2} \begin{pmatrix} (d-2c)f_2 & F_2 & 0 \\ F_2 & df_2 & 0 \\ 0 & 0 & (d-2e)f_2 \end{pmatrix} \\ & \left. + \delta_{j3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & F_2 \\ 0 & 0 & ef_2 \\ F_2 & ef_2 & 0 \end{pmatrix} \right] \quad (3.29) \end{aligned}$$

où les fonctions temporelles sont définies de la façon suivante:

$$\begin{aligned} F_1(t) &= -\frac{1}{\alpha_0} \dot{\delta}(t - \tau_p) + \frac{4\nu+3}{s\nu+2} \delta(t - \tau_s) - \alpha_0^2 \left( Q + \frac{2}{s} - \frac{2}{\nu+3} K \right) f_1 - \frac{2\alpha_0^2}{R_w(\nu+3)} f_2 \\ F_2(t) &= -\frac{1}{\beta_0} \dot{\delta}(t - \tau_s) + \beta_0^2 \left( \frac{1}{s} + \frac{1}{R_w} \right) f_1 - \beta_0^2 (Q + K) f_2 \\ F_3(t) &= -\frac{1}{\alpha_0(\nu+3)} \dot{\delta}(t - \tau_p) + \frac{4}{s(\nu+2)} \delta(t - \tau_s) - \frac{\alpha_0^2}{\nu+3} \left( Q + \frac{2}{s} - (\nu+4)K \right) f_1 \\ &\quad - \alpha_0^2 \frac{\nu+4}{(\nu+3)R_w} f_2 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Les expressions en fréquence sont obtenues très simplement en remplaçant dans les expressions ci-dessus  $\delta(t - \tau)$  par  $e^{-i\omega\tau}$  et  $\dot{\delta}(t - \tau)$  par  $(-i\omega)e^{-i\omega\tau}$ .

$Q$ ,  $K$  et  $J$  sont des coefficients géométriques, homogènes à l'inverse d'une distance:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{(z_0+h)} \left( \frac{\nu+3}{2} \cos(j) + \coth(\xi) \right) \longrightarrow \frac{1}{r} \\ K &= \frac{1}{(z_0+h)} (\cos(j) + \coth(\xi)) \longrightarrow \frac{1}{r} \\ J &= \frac{\cos(j_0) - \cos(j)}{R_w \sin(j_0)} \longrightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

(La flèche indique la limite de ces coefficients quand le gradient de vitesse tend vers 0.)

Les termes  $c$ ,  $d$  et  $e$  ont les valeurs suivantes:

$$c = \frac{\nu+1}{2} J \beta_0^2, \quad d = \frac{\nu+3}{2} J \alpha_0^2 \quad \text{et} \quad e = \frac{\nu+5}{2} J \beta_0^2 \quad (3.32)$$

Dans le cas d'un gradient de vitesse faible, le terme  $J$  peut être négligé, et l'on obtient alors une expression simple en coordonnées cartésiennes:

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}_{ijk} = & \left( \frac{h+z}{h+z_0} \right)^{\frac{\nu-1}{2}} \frac{1}{4\pi R_w} \left[ \gamma_i \gamma_j^0 \gamma_k F_1 + (\delta_{ki} \gamma_j^0 - \gamma_i \gamma_j^0 \gamma_k) F_3 \right. \\ & \left. + (\gamma_k (P^T P_0)_{ij} + \gamma_i (P^T P_0)_{kj} - 2\gamma_i \gamma_j^0 \gamma_k) F_2 \right] \quad (3.33) \end{aligned}$$



## Annexe 3.B: Dérivations en coordonnées bisphériques

Nous utilisons dans cette annexe le formalisme développé dans Aki & Richards (1980) (pages 30-35, vol I).

Dans un système de coordonnées curvilinéaires orthogonales, la loi de Hooke pour un milieu élastique isotrope a la même forme qu'en coordonnées cartésiennes. Comme le système de coordonnées bisphériques  $(\xi, j_0, \phi)$  est orthogonal (rais et fronts d'ondes se croisent à angle droit, par définition), la loi de Hooke donne le tenseur des contraintes  $\tau$  par la relation:

$$\tau^{ij} = \lambda \delta_{ij} e^{kk} + 2\mu e^{ij} \quad (3.34)$$

où les  $e^{ij}$  sont les coefficients du tenseur de déformation exprimé en coordonnées bisphériques, et sont donnés par la relation (2.45) de Aki & Richards. La forme développée de cette expression est la suivante:

$$\begin{aligned} e^{11} &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial u^1}{\partial \xi} + \frac{u^2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial j_0} + \frac{u^3}{h_1 h_3} \frac{\partial h_1}{\partial \phi} \\ e^{22} &= \frac{1}{h_2} \frac{\partial u^2}{\partial j_0} + \frac{u^1}{h_2 h_1} \frac{\partial h_2}{\partial \xi} + \frac{u^3}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \phi} \\ e^{33} &= \frac{1}{h_3} \frac{\partial u^3}{\partial \phi} + \frac{u^1}{h_3 h_1} \frac{\partial h_3}{\partial \xi} + \frac{u^2}{h_3 h_2} \frac{\partial h_3}{\partial j_0} \\ e^{12} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{h_2} \frac{\partial u^1}{\partial j_0} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial u^2}{\partial \xi} - \frac{u^1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial j_0} - \frac{u^2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \xi} \right] \\ e^{13} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{h_3} \frac{\partial u^1}{\partial \phi} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial u^3}{\partial \xi} - \frac{u^1}{h_1 h_3} \frac{\partial h_1}{\partial \phi} - \frac{u^3}{h_1 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial \xi} \right] \\ e^{23} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{h_3} \frac{\partial u^2}{\partial \phi} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial u^3}{\partial j_0} - \frac{u^2}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \phi} - \frac{u^3}{h_2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial j_0} \right] \end{aligned} \quad (3.35)$$

Dans ces expressions, les facteurs d'échelle  $h_1, h_2, h_3$  associés aux coordonnées  $\xi, j_0$  et  $\phi$  valent:

$$h_1 \equiv h_\xi = h + z = \frac{h + z_0}{\sinh(\xi)(\coth(\xi) - \cos(j_0))} \quad (3.36)$$

$$h_2 \equiv h_{j_0} = \frac{R_1 R_2}{2(h + z_0)} = \frac{R_H}{\sin(j_0)} = (h + z) \sinh(\xi) = \frac{h + z_0}{\coth(\xi) - \cos(j_0)} \quad (3.37)$$

$$h_3 \equiv h_\phi = \frac{R_1 R_2}{2R} = R_w \sin j = R_H = \frac{(h + z_0) \sin(j_0)}{\coth(\xi) - \cos(j_0)} \quad (3.38)$$

Les relations suivantes peuvent être obtenues:

$$\frac{\partial h_2}{\partial \xi} = \frac{h_1^2}{h + z_0} \quad \frac{\partial h_3}{\partial \xi} = \frac{h_1^2 h_3}{(h + z_0) h_2} \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial j_0} = h_1 \frac{\sin(j_0)}{\coth(\xi) - \cos(j_0)} = \frac{h_1 h_3}{h + z_0} \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial h_3}{\partial j_0} = h_3 \frac{\sin(j_0)}{\coth(\xi) - \cos(j_0)} + h_3 \frac{\cos(j_0)}{\sin(j_0)} = \frac{h_3^2}{z_0} + h_2 \cos(j_0) \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial \phi} = 0 \quad \frac{\partial h_2}{\partial \phi} = 0 \quad (3.42)$$

Après simplification, le jeu d'équations 3.35 donne les expressions suivantes pour les coefficients  $e^{ij}$ :

$$\begin{aligned} e^{11} &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial u^1}{\partial \xi} + u^2 \frac{h_3}{(h + z_0) h_2} \\ e^{22} &= \frac{1}{h_2} \frac{\partial u^2}{\partial j_0} + u^1 \frac{h_1}{(h + z_0) h_2} \\ e^{33} &= \frac{1}{h_3} \frac{\partial u^3}{\partial \phi} + u^1 \frac{h_1}{(h + z_0) h_2} + u^2 \left( \frac{h_3}{(h + z_0) h_2} + \frac{\cos(j_0)}{h_3} \right) \\ e^{12} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{h_2} \frac{\partial u^1}{\partial j_0} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial u^2}{\partial \xi} - u^1 \frac{h_3}{(h + z_0) h_2} - u^2 \frac{h_1}{(h + z_0) h_2} \right] \\ e^{13} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{h_3} \frac{\partial u^1}{\partial \phi} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial u^3}{\partial \xi} - u^3 \frac{h_1}{(h + z_0) h_2} \right] \\ e^{23} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{h_3} \frac{\partial u^2}{\partial \phi} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial u^3}{\partial j_0} - u^3 \left( \frac{h_3}{(h + z_0) h_2} + \frac{\cos(j_0)}{h_3} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.43)$$

En partant de ces expressions, et en utilisant 3.34, les fonctions de Green en contraintes sont obtenues en effectuant les opérations de dérivations, par rapport aux trois coordonnées bisphériques, sur les fonctions de Green en déplacement.

*Remarque:* aucune dérivée ne peut-être négligée à priori, et tous les termes doivent être calculés.



### Annexe 3.C: Essais d'amélioration des fonctions de Green approchées

Dans cette annexe, nous avons essayé, en nous basant sur une écriture découplée des ondes sismiques, de trouver des approximations des fonctions de Green qui soient meilleures que les expressions  $\tilde{G}$ . Nous n'arrivons finalement pas à un résultat exploitable.

La décomposition qui permet de faire apparaître le découplage des ondes  $P$  et  $S$  n'est pas celle de Helmholtz, mais une généralisation de cette dernière, proposée par Hook (1961), et qui peut s'écrire:

$$\vec{U} = \vec{U}_P + \vec{U}_{SV} + \vec{U}_{SH} \quad (3.44)$$

$$\vec{U}_P = \frac{1}{g_1} \vec{\nabla}(g_2 \Phi_1) \quad (3.45)$$

$$\vec{U}_{SV} = -\frac{1}{g_3} \vec{\nabla} \times [g_4 \vec{\nabla} \times (\Phi_2 \vec{e}_z)] \quad (3.46)$$

$$\vec{U}_{SH} = -\vec{\nabla} \times (\Phi_3 \vec{e}_z) = \vec{e}_z \times \vec{\nabla} \Phi_3 \quad (3.47)$$

Dans le cas d'un milieu à gradient constant, les fonctions  $g_i$  valent (Hook, 1962c), en utilisant les notations de 3.1:

$$\begin{aligned} g_1 &= \left( \frac{h+z}{h+z_0} \right)^{-2} & \text{et} & & g_2 &= \left( \frac{h+z}{h+z_0} \right)^{-1} \\ g_3 &= \left( \frac{h+z}{h+z_0} \right)^{\nu+2} & \text{et} & & g_4 &= \left( \frac{h+z}{h+z_0} \right)^{\nu+3} \end{aligned} \quad (3.48)$$

Les potentiels  $\Phi_i$  ne vérifient pas l'équation des ondes habituelle mais l'équation suivante (avec  $c = \alpha$  pour  $\Phi_1$  et  $c = \beta$  pour  $\Phi_2$  et  $\Phi_3$ ):

$$\nabla^2 \Phi_i + \frac{2+\nu}{h+z} \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial t^2} = 0 \quad (3.49)$$

Cette équation contient un terme supplémentaire en  $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ , qui la rend dispersive.

En utilisant la dépendance en  $z$  des fonctions  $g_i$ , les expressions 3.45, 3.46 et 3.47 peuvent être développées de la façon suivante:

$$\vec{U}_P = \frac{h+z}{h+z_0} \vec{\nabla} \Phi_1 - \frac{\Phi_1}{h+z_0} \vec{e}_z \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} \vec{U}_{SV} &= \left[ \frac{h+z}{h+z_0} \nabla^2 \Phi_2 + \frac{\nu+3}{h+z_0} \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \right] \vec{e}_z - \frac{\nu+3}{h+z_0} \vec{\nabla} \Phi_2 - \frac{h+z}{h+z_0} \frac{\partial \vec{\nabla} \Phi_2}{\partial z} \\ &= -\frac{\nu+3}{h+z_0} \vec{\nabla}_H \Phi_2 - \frac{h+z}{h+z_0} \frac{\partial \vec{\nabla}_H \Phi_2}{\partial z} + \frac{h+z}{h+z_0} \nabla_H^2 \Phi_2 \vec{e}_z \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\vec{U}_{SH} = \vec{e}_z \times \vec{\nabla} \Phi_3 \quad (3.52)$$

Les trois potentiels  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  et  $\Phi_3$  correspondent asymptotiquement (quand le gradient de vitesse tend vers 0) aux trois types d'ondes que l'on distingue habituellement en milieu homogène: P, SV et SH. Les ondes associées sont donc dénommées P, SV et SH généralisées. Leurs fronts d'ondes se déplacent respectivement aux vitesses  $\alpha(z)$  et  $\beta(z)$ .

Néanmoins, comme nous le constatons en examinant l'équation 3.45, les ondes P généralisées ne sont pas irrotationnelles. Elles ne génèrent pas non plus un déplacement purement longitudinal. De même, les ondes SV généralisées ne sont pas solénoïdales (i.e. à divergence nulle), et n'ont pas un mouvement purement transverse. Ce sont les vecteurs  $g_1 \vec{U}_P$  et  $g_3 \vec{U}_{SV}$  qui sont respectivement irrotationnel et solénoïdal.

Les ondes SH généralisées, quand à elles, sont, comme dans le cas homogène, solénoïdales et génèrent un déplacement transverse horizontal.

Maintenant, en reprenant l'équation 3.50, on s'aperçoit que le déplacement correspondant aux ondes P généralisées s'écrit comme la somme d'un terme longitudinal et d'un terme vertical. Or c'est principalement cette composante verticale qui est mal modélisée en champ lointain. Ainsi, une correction que l'on peut essayer d'apporter heuristiquement aux fonctions de Green approchées, serait de déterminer un potentiel  $\Phi_1$ , de telle manière que la partie longitudinale de l'équation 3.50 soit égale à l'expression  $\tilde{G}$  proposée. Or, l'équation 3.50 peut se réécrire, en combinant coordonnées cartésiennes et coordonnées bisphériques, sous la forme:

$$\vec{U}_P = \frac{1}{h+z_0} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \vec{e}_\xi + \left( \frac{h+z}{h+z_0} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} - \frac{\Phi_1}{h+z_0} \right) \vec{e}_z \quad (3.53)$$

Pour que la partie longitudinale de la solution soit égale à  $\tilde{G}$ ,  $\Phi_1$  doit être choisi tel que:

$$\frac{1}{h+z_0} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} = \tilde{G}_{11} = \frac{\Lambda}{4\pi\rho_0} f_1 \quad (3.54)$$

$$\text{soit} \quad \Phi_1(z, \xi, t) = \frac{h+z_0}{4\pi\rho_0} \left( \frac{h+z_0}{h+z} \right)^{\frac{\nu+3}{2}} \int \frac{f_1(t, \xi')}{R_w} d\xi' \quad (3.55)$$

soit

$$\Phi_1(z, \xi, t) = \frac{1}{4\pi\rho_0\alpha_0^2} \left( \frac{h+z_0}{h+z} \right)^{\frac{\nu+3}{2}} \left( \int \frac{\delta(t - \xi' t_0)}{\sinh \xi'} d\xi' + \frac{2t}{t_0^2} \int \frac{H(t - \xi' t_0) - H(t - \xi' t_1)}{\xi'^2 \sinh \xi'} d\xi' \right) \quad (3.56)$$

où  $H$  est la fonction de Heaviside, et où l'on a posé:  $t_0 = \frac{\tau_p}{\xi} = \frac{1}{|\vec{\nabla}\alpha|}$  et  $t_1 = \frac{\tau_s}{\xi} = \frac{1}{|\vec{\nabla}\beta|}$ .



On obtient alors, en appliquant 3.53 :

$$\vec{U}_P = \frac{\Lambda}{4\pi\rho_0} f_1 \vec{e}_\xi - \frac{(\nu+5)/2}{(h+z_0)} \Phi_1 \vec{e}_z \quad (3.57)$$

En fin de compte, l'expression de  $\vec{U}_P$  peut être réarrangée de la manière suivante :

$$\vec{U}_P = \underbrace{\frac{\Lambda}{4\pi\rho_0} f_1(t, \xi) \vec{e}_\xi}_{\text{partie "onde P" de } \tilde{\mathbf{G}}} - \underbrace{\frac{\Lambda}{4\pi\rho_0} \frac{(\nu+5)}{2} \sinh(\xi) F(t, \xi) \vec{e}_z}_{\text{terme correctif}} \quad (3.58)$$

où

$$\begin{aligned} F(t, \xi) &= \int \frac{f_1(t, \xi')}{\sinh \xi'} d\xi' \\ &= \frac{1}{\alpha_0^2} \int \frac{\delta(t - \xi' t_0)}{\sinh \xi'} d\xi' + \frac{2t}{(h+z_0)^2} \int \frac{H(t - \xi' t_0) - H(t - \xi' t_1)}{\xi'^2 \sinh \xi'} d\xi' \end{aligned} \quad (3.59)$$

qui est définie comme une primitive, qu'il reste à déterminer.

Nous notons :

$$\begin{aligned} L(x) &= \int_{x_0}^x \frac{1}{\xi'^2 \sinh \xi'} d\xi' \\ &= \frac{2}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ (1+2k)x Ei[(1+2k)x] - e^{-(1+2k)x} \right] + \text{Ctte} \\ &= \frac{2}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{-1!}{(2k+1)x} + \frac{2!}{(2k+1)^2 x^2} - \frac{3!}{(2k+1)^3 x^3} + \dots \right] + \text{Ctte} \end{aligned} \quad (3.60)$$

où  $Ei$  est la fonction exponentielle intégrale (d'après Gradshteyn & Ryzhik, 1980).

La primitive  $F$  peut s'écrire à l'aide de  $L$  :

$$\begin{aligned} F(t, \xi) &= -\frac{H(t - \xi t_0)}{\alpha_0^2 t_0 \sinh(t/t_0)} + \frac{2t}{(h+z_0)^2} \left[ H(t - \xi t_0) [L(\xi) - L(t/t_0)] \right. \\ &\quad \left. - H(t - \xi t_1) [L(\xi) - L(t/t_1)] \right] + C(z, t) \end{aligned} \quad (3.61)$$

Comme le déplacement doit être nul pour tout  $\xi > t/t_0$  (pour respecter la causalité), la constante  $C(z, t)$  est nécessairement nulle.

En champ proche, le terme en  $\vec{e}_z$  doit devenir négligeable devant le terme en  $\vec{e}_\xi$ , (comme c'est le cas pour l'explosion), d'où la condition :

$$\sinh(\xi) F(t, \xi) = o\left(\frac{1}{\xi^2 \sinh \xi}\right) \text{ en } \xi = 0, \text{ pour tout } t. \quad (3.62)$$

On peut montrer que  $\sinh(\xi)F(\xi)$  est borné quand  $\xi$  tend vers 0. La condition de négligeabilité en champ proche est donc vérifiée. Les tests numériques de ces fonctions de Green, qui nécessitent l'évaluation de  $L(x)$  (qui ne peut se faire qu'approximativement et nécessite un temps de calcul plus important) ne permettent pas de valider l'amélioration proposée.

Pour les ondes SV, le problème est complexifié par le fait que le potentiel  $\Phi_2$  est dérivé deux fois.

Pour les ondes SH généralisées, par contre, aucun terme additionnel comparable au terme en  $\vec{e}_z$  des ondes P n'apparaît. En effet, le déplacement obtenu par l'équation 3.52 est horizontal et transverse, ce qui est aussi le cas de la partie SH de  $\tilde{\mathbf{G}}$ . Les expressions de Sánchez-Sesma sont donc sans doute moins fausses pour les ondes SH, bien qu'elles ne prennent toujours pas en compte la dispersion à basse fréquence.



## Chapitre 4

### Couplage entre méthodes de frontière et méthodes de domaine: Différences Finies en fréquence.

Dans les chapitres 1 et 2, une méthode de modélisation des ondes élastiques dans des milieux tridimensionnels homogènes, utilisant une formulation par éléments de frontière, a été développée. Cette méthode nécessite une discrétisation à seulement deux dimensions. En notant  $N$  le nombre de noeuds selon une direction, les équations discrétisées portent sur  $N^2$  éléments distincts, mais les interactions de chacun de ces éléments sur tous les autres entraînent un nombre d'interactions qui est de l'ordre de  $N^4$ . Dans les méthodes de domaine, le nombre de noeuds vaut  $N^3$  et, les équations étant discrétisées localement, le nombre d'interactions à calculer est proportionnel à  $N^3$ . Avec les éléments de frontières, une bonne précision est atteinte en utilisant 4 points par longueur d'onde minimum pour la discrétisation de la surface. Ce nombre est en général un peu plus élevé pour les méthodes de domaine, mais la croissance en  $N^3$  seulement du nombre d'interactions à calculer leur confère quoi qu'il en soit un avantage sur les méthodes de frontière, dès que les valeurs de  $N$  deviennent importantes.

La méthode d'éléments de frontière développée conduit à des résultats précis et à une bonne prise en compte de la topographie. Par contre, le temps de calcul nécessaire demeure élevé tant qu'on ne dispose pas d'une mémoire suffisante pour ne pas recalculer les mêmes coefficients à chaque étape. De plus, on ne peut considérer des paramètres élastiques ayant des variations continues; la détermination de fonctions de Green approchées pour des milieux hétérogènes n'a pu être réalisée pour des gradients réalistes. Actuellement, des développements visant à améliorer les méthodes d'éléments de frontière sont en cours:



par exemple la méthode des "fast multipole" (Fujiwara, 1998), de mise en oeuvre ardue, ou la méthode de Galerkin (Sánchez-Sesma et al., 1999b).

Nous proposons d'essayer de profiter des avantages conjugués des méthodes de frontière et des méthodes de domaine, en nous orientant vers une méthode hybride. Les éléments de frontière, appliqués à de petits éléments de volume, peuvent permettre la prise en compte exacte et précise de la surface libre et des discontinuités du milieu. Parmi les méthodes de domaine, les différences finies ont l'avantage de la simplicité de mise en oeuvre et d'un contrôle rigoureux de la stabilité. Elles sont donc bien adaptées pour tester les possibilités d'un couplage des éléments de frontière avec une méthode de domaine.

Ce chapitre constitue en fait une étude préliminaire au développement d'une méthode hybride couplant Différences Finies et Éléments de Frontière et reflète un travail initié récemment que nous réalisons en collaboration, avec mon directeur de thèse. Mon travail a porté essentiellement sur le développement de la méthode de domaine (différences finies).

En utilisant une formulation en temps, nous avons pu constater précédemment certaines difficultés, notamment en ce qui concerne l'évaluation des dérivées temporelles. Afin d'éviter ces difficultés, nous avons choisi pour effectuer le couplage avec les différences finies, d'utiliser une formulation en fréquence. Un avantage supplémentaire de la résolution en fréquence est l'introduction de manière bien plus aisée des pertes visco-élastiques dans le schéma de différences finies.

Les méthodes de différences finies en 3D sont le plus souvent résolues dans le domaine temporel, ce qui mène à un schéma de résolution explicite. Néanmoins, le domaine fréquentiel a parfois été utilisé (Marfurt, 1984; Song & Williamson, 1995; Stekl & Pratt, 1998). De manière à disposer d'un schéma simple à implémenter et surtout à combiner avec les éléments de frontière, nous voulons disposer d'un schéma d'ordre 2, qui soit suffisamment précis. Nous avons donc examiné, en suivant ce qui avait été réalisé en 2D par Stekl & Pratt (1998), et également en 3D par Geller et Takeuchi (1998), les possibilités d'optimisation d'un schéma d'ordre 2.

Les matrices correspondants aux systèmes linéaires obtenus en différences finies sont très creuses, car chaque noeud du maillage n'a qu'une influence locale sur les autres noeuds. L'emploi d'une méthode d'inversion itérative permet de tirer avantage de cette particularité. Nous avons examiné les différentes méthodes existantes permettant un stockage approprié de ces matrices, et une inversion itérative efficace.

Nous présentons également les premiers résultats obtenus avec les différences finies sans mettre de surface libre. Pour la partie concernant le couplage Différences Finies/Éléments

de Frontière, nous ne présentons que les principes qui seront mis en oeuvre.

## 4.1 Variété des méthodes de différences finies

Les méthodes de différences finies reposent sur la discrétisation du milieu élastique considéré en un maillage régulier, aux noeuds duquel sont écrites les équations des ondes sous une forme discrétisée. On obtient ainsi un système linéaire portant sur les valeurs du déplacement, de la vitesse ou de la contrainte aux noeuds du modèle, suivant le type de formulation utilisé. L'équation de l'Elastodynamique est donc résolue localement en tout point du modèle.

La plupart du temps, les méthodes de différences finies sont résolues en temps, ce qui donne un schéma explicite, mais introduit des imprécisions dans le calcul des dérivées temporelles, et impose le respect de conditions de stabilité du type Courant (i.e.  $\frac{c\Delta t}{h} < M$ , où  $c$  est la vitesse de propagation des ondes et  $\Delta t$  et  $h$  sont les pas de discrétisation en temps et en espace.)

La résolution dans le domaine fréquentiel est beaucoup moins utilisée, car elle nécessite la résolution d'un système linéaire. Néanmoins, elle peut-être intéressante par exemple quand un même problème est à résoudre pour différentes sources (Stekl & Pratt, 1998). De plus, l'atténuation anélastique est prise en compte de manière beaucoup plus simple, en introduisant des paramètres élastiques complexes.

La formulation des différences finies qui semble la plus immédiate est la discrétisation directe de l'équation de l'Elastodynamique, en n'introduisant comme inconnues que les déplacements aux noeuds du maillage. L'évaluation de dérivées spatiales secondes est nécessaire, ce qui requiert plus de noeuds, pour une même précision, que l'évaluation d'une dérivée première. On constate également que le schéma devient dispersif pour les coefficients de Poisson élevés (Moczo et al., 1999). Par contre, ce schéma est celui qui permet le mieux de prendre en compte les hétérogénéités, et notamment les discontinuités internes du modèle qui ne correspondent pas à des plans du maillage (Moczo et al., 1999).

Une formulation portant sur les valeurs des vitesses et des contraintes sur une grille en quinconce ("staggered grid", Virieux, 1984; Virieux, 1986; Levander, 1988) s'est montrée beaucoup mieux adaptée à la prise en compte d'interfaces liquides-solides ou de milieux altérés (i.e. aux valeurs de  $\sigma$  élevés): elle se montre plus stable et plus précise. Cette formulation ne fait intervenir que des dérivées premières et, même pour des milieux hétérogènes, ne nécessite pas le calcul de dérivées des paramètres élastiques. Par contre,



en 3D, cette formulation demande 33% de mémoire supplémentaire, ce qui peut être un facteur limitant. Une méthode mathématiquement équivalente a été proposée par Luo & Schuster (1990), ayant comme inconnues le déplacement et la contrainte, et supprimant ce supplément de mémoire nécessaire. Le maillage associé à cette méthode est appelé "parsimonious staggered grid".

En plus des différentes formulations possibles, les schémas de dérivations utilisés peuvent avoir une précision plus ou moins grande. Pour les modèles 3D réalistes de grande dimension, des schémas d'ordre 4 en espace et d'ordre 2 en temps sont utilisés le plus souvent (Frankel & Vidale, 1992; Olsen et al., 1995; Wald & Graves 1998 par exemple). De plus, comme les modèles comportent en général des zones à vitesses d'onde S faibles (zones altérées en surface), c'est le plus souvent une formulation avec grille en quinconce qui est choisie. Graves (1996), Wald & Graves (1998) et Pitarka (1999) utilisent une formulation en vitesse-contrainte, alors que Rodrigues (1993), Olsen et al. (1995) et Ohminato & Chouet (1997) se servent de la formulation en déplacement-contrainte. Frankel & Vidale ont eux utilisé une formulation en déplacement. Il est à noter que Rodrigues utilise un schéma d'ordre 8 en espace et 4 en temps, et n'utilise que 3 points par longueur d'onde minimale (en considérant une surface libre plane), alors que Ohminato & Chouet, avec un schéma d'ordre 2 en espace et en temps, doivent utiliser 25 points par longueur d'onde minimale (avec une topographie dans leur modèle).

Dans le cas d'une résolution en fréquence, le nombre d'inconnues doit être le plus petit possible, donc le schéma doit absolument être écrit en déplacement. Stekl & Pratt (1998) montrent que, en utilisant leurs opérateurs d'ordre 2 optimisés, des inclusions de fluides peuvent malgré tout être modélisées correctement (en 2D).

Pour améliorer l'efficacité des algorithmes, on peut bien sûr tenter d'augmenter la précision des schémas de différentiation, en les optimisant, ou en utilisant des schémas d'ordre élevé. Néanmoins, d'autres techniques ont été proposées. Par exemple, des algorithmes d'optimisation de la mémoire permettent à la fois de diminuer la taille de la mémoire vive requise en stockant une partie des données sur le disque dur, et d'optimiser les opérations d'entrée/sortie entre le disque dur et la mémoire vive (Graves, 1996; Moczo et al., 1999). Des schémas à taille de grille variable permettent également, pour des modèles à fortes hétérogénéités, d'optimiser la discrétisation du milieu, en ne dépassant pas de trop le nombre de points par longueur d'onde minimum requis localement (Pitarka, 1999). La programmation parallèle est également utilisée de plus en plus couramment pour accélérer le processus de résolution (e.g. Rodrigues, 1993; Olsen et al., 1995; Ohminato & Chouet, 1997).

## 4.2 Méthode des différences finies en déplacement et fréquence

Il s'agit de trouver une forme discrète de l'équation de l'Elastodynamique, écrite en déplacement, dans le domaine spectral. En 3D, cette équation s'écrit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + f_x(\omega) &= -\rho\omega^2 u \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + f_y(\omega) &= -\rho\omega^2 v \\ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] + f_z(\omega) &= -\rho\omega^2 w \end{aligned} \quad (4.1)$$

où les  $f_i$  représentent les 3 composantes de la transformée de Fourier de la densité de force volumique.

Dans le cas d'un milieu homogène, ce système d'équations se réduit à:

$$\begin{aligned} \rho\omega^2 u + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) &= -f_x(\omega) \\ \rho\omega^2 v + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right) &= -f_y(\omega) \\ \rho\omega^2 w + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \right) &= -f_z(\omega) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Les dérivées secondes en espace sont évaluées à l'aide des valeurs discrètes du déplacement. Pour cela, différents schémas sont possibles, utilisant un nombre de noeuds du voisinage plus ou moins important, et ayant donc une précision plus ou moins bonne.

En imposant un terme source et des conditions aux limites, nous sommes conduits à résoudre, pour chaque fréquence, un système linéaire qui peut s'écrire sous la forme:

$$\omega^2 \mathcal{M}U + \mathcal{K}U = F \quad (4.3)$$



où l'on définit les éléments suivants (pour un maillage à  $N \times N \times N$  noeuds):

–  $U$  est un vecteur à  $3N^3$  composantes, représentant les 3 composantes du déplacement en chacun des noeuds du maillage.

–  $\mathcal{M}$  est une matrice  $3N^3 \times 3N^3$ , appelée matrice de masse. Dans un schéma classique, c'est une matrice diagonale dont les coefficients ont pour valeur la densité  $\rho$  aux noeuds du maillage.

–  $\mathcal{K}$  est une matrice  $3N^3 \times 3N^3$ , appelée matrice de rigidité et regroupe les termes de dérivées spatiales. Cette matrice est très creuse, puisque seuls les noeuds du voisinage sont utilisés pour le calcul des dérivées.

–  $F$ , le terme source, est un vecteur à  $3N^3$  composantes. Ses coefficients donnent la densité des forces volumiques aux noeuds du modèle.

En posant  $\mathcal{A} = \omega^2 \mathcal{M} + \mathcal{K}$ , l'équation de l'Elastodynamique apparaît sous la forme d'un système linéaire  $\mathcal{A}U = F$ , où  $\mathcal{A}$  est une matrice creuse.

### 4.3 Détermination d'un schéma de différences finies d'ordre 2 optimal en 3D

#### 4.3.1 De l'intérêt d'utiliser un schéma d'ordre 2

Pour résoudre l'équation des ondes à l'aide d'une méthode de différences finies, un schéma de différentiation est utilisé afin d'évaluer les dérivées secondes en espace. Les schémas les plus couramment utilisés sont d'ordre 2 ou d'ordre 4. Cela signifie que la précision avec laquelle les dérivées sont obtenues est proportionnelle à  $h^2$  et  $h^4$  respectivement (où  $h$  est la distance entre deux noeuds voisins).

Le schéma d'ordre 2 classique en 3D utilise 19 noeuds du voisinage (Figure 4.1). On appellera cet ensemble de noeuds, utilisé pour le calcul des dérivées spatiales en un point, "l'étoile". Pour le schéma d'ordre 4 classique, en 3D, l'étoile utilisée est plus étendue et comporte 37 noeuds (voir annexe 4.B).

L'utilisation d'un schéma d'ordre élevé augmente la précision du calcul pour une discrétisation donnée. En pratique, ces schémas permettent de diminuer le nombre de noeuds du maillage, tout en conservant la même précision: dans le cas 2D, Levander (1988) passe de 10 points par longueur d'onde en utilisant un schéma d'ordre 2, à 5 points avec un

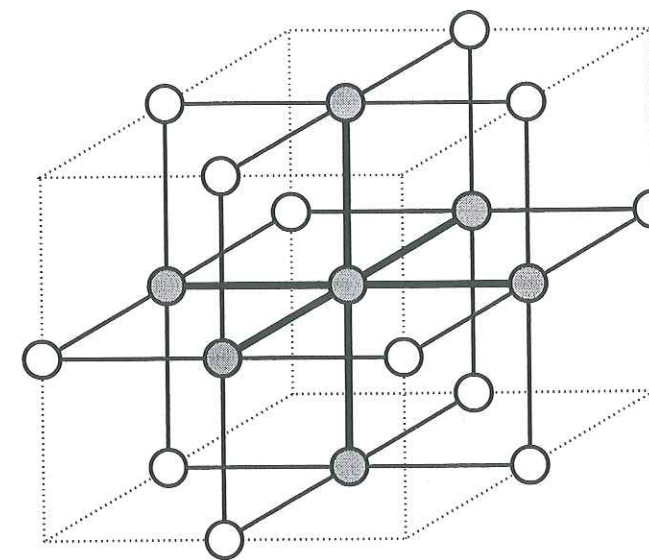


FIG. 4.1 – Étoile utilisée par les schémas classiques d'ordre 2 en trois dimensions (19 noeuds)

schéma d'ordre 4 (pour un schéma écrit en vitesse-contrainte). En contrepartie, le nombre de noeuds pris en compte pour évaluer une dérivée augmente avec l'ordre du schéma, ce qui augmente également le nombre des coefficients non nuls de la matrice de rigidité, et ajoute aussi à la difficulté de traitement des bords.

Le gain en nombre de noeuds de maillage est donc contrebalancé par un remplissage plus important de la matrice à inverser. Le choix du schéma de différentiation devra donc faire un compromis entre ces deux contraintes, en tenant compte de la méthode d'inversion retenue. Il est à noter que l'ordre du schéma utilisé ne donne qu'une idée de la précision atteinte. Il existe en effet des moyens d'optimiser un schéma d'ordre donné, qui seront examinés plus loin.

À la fin du processus de discrétisation, la matrice  $\mathcal{A}$  obtenue est toujours une matrice "bande". Cela signifie que tous les éléments non nuls de cette matrice sont plus ou moins regroupés autour de la diagonale. On définit la "largeur de bande" de la matrice  $\mathcal{A} = (a_{ij})$  comme le plus petit entier  $l = m_1 + m_2 + 1$ , vérifiant:

$$\forall (i, j), \quad [(j < i - m_1) \text{ ou } (j > i + m_2)] \Rightarrow a_{ij} = 0 \quad (4.4)$$

( $m_1$  et  $m_2$  sont les "demi-largeurs de bande", respectivement gauche et droite).

Dans les méthodes de résolution directes, la "largeur de bande"  $l$  est un paramètre très important qui conditionne la rapidité de résolution du système. Dans le cas d'un modèle



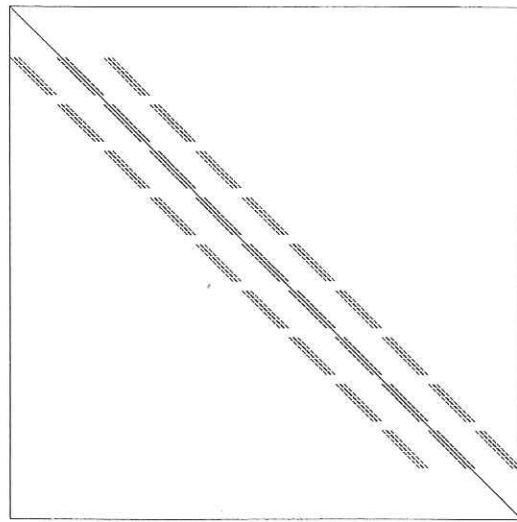


FIG. 4.2 – Remplissage de la matrice "A" pour un schéma d'ordre 2 à 19 noeuds par étoile (c.f. Figure 4.1), sur un maillage de  $11 \times 11 \times 11$  noeuds.

3D à  $N \times N \times N$  noeuds, où les noeuds du maillage sont numérotés de manière régulière, par lignes puis plans successifs (grille produit tensoriel), on obtient  $l = 2N^2 + 2N + 1 \simeq 2N^2$ , pour un schéma d'ordre 2 sur l'étoile à 19 points de la figure 4.1. La forme de la matrice A dans ce cas est donnée sur la Figure 4.2. Pour un schéma d'ordre 4, la largeur de bande est en gros multipliée par 2 ( $l \simeq 4N^2$ ).

Dans tous les cas, les schémas d'ordre 2 conduisent à des matrices plus creuses, ce qui peut leur conférer un avantage numérique sur les schémas d'ordre plus élevé, à condition de ne pas nécessiter une discrétisation trop fine.

### 4.3.2 Les schémas de différentiation optimisés

Jo et al. (1996) résolvent l'équation d'ondes 2D acoustique en fréquence. Ils relèvent que l'utilisation d'un schéma du second ordre aux différences centrées classique nécessite un nombre de points par longueur d'onde plus important si l'on résout le problème dans le domaine des fréquences que dans le domaine temporel. Ils proposent donc une amélioration du schéma de différence finies, basée sur: 1) la réduction de l'anisotropie numérique grâce à la définition d'un nouvel opérateur Laplacien numérique basé sur un repère tourné de  $45^\circ$  par rapport aux axes du maillage, 2) l'évaluation de la matrice de masse par combinaison linéaire d'une matrice condensée et d'une matrice consistante (Marfurt, 1984), 3) l'optimisation des coefficients de pondération associés. Stekl et Pratt (1998) adaptent ces techniques à une méthode de différences finies pour l'équation d'onde visco-élastique

en 2D.

De leur côté, Geller & Takeuchi (1995) proposent un critère d'optimisation des opérateurs discrétisés des équations du mouvement. Les schémas de différentiation sont optimisés au sens d'une minimisation globale de l'erreur commise sur les sismogrammes, obtenue en minimisant l'erreur pour toutes les fonctions propres du système. Geller & Takeuchi montrent que cela équivaut à minimiser l'erreur sur les fréquences propres des opérateurs. La minimisation de la dispersion numérique des vitesses des ondes P et S est obtenue comme une conséquence de la minimisation de l'erreur commise pour chacun des modes.

Cette même méthode a également été utilisée pour définir un schéma optimisé dans le domaine temps-espace en 1D (Geller & Takeuchi, 1998) puis en 2D et en 3D (Takeuchi & Geller, 1999).

Nous appellerons cette méthode "méthode d'optimisation globale", alors que la méthode dérivée de Stekl & Pratt (1998) sera dite de "rotation-condensation". Ces deux techniques d'optimisation vont être examinées plus en détail, et nous verrons quelle relation il existe entre elles.

### 4.3.3 Utilisation de repères tournés et de la condensation de masse

Stekl & Pratt (1998) ont proposé une méthode de différences finies 2D en fréquence, dans laquelle ils utilisent un schéma d'ordre 2 optimisé. La méthode des "dissections emboîtées" (nested dissection), qu'ils utilisent pour l'inversion, nécessite une largeur de bande aussi petite que possible. Le schéma d'ordre 2 ayant la largeur de bande la plus petite, ils ont été conduits à optimiser celui-ci.

Comme il a déjà été mentionné, l'amélioration du schéma d'ordre 2 qu'ils proposent repose sur deux idées: l'écriture des opérateurs de dérivations dans des repères tournés par rapport aux axes du maillage, et la condensation de masse, qui est un procédé classiquement utilisé dans les méthodes d'éléments finis. Ces deux idées sont également utilisables pour améliorer le schéma aux différences finies en trois dimensions, et nous les avons exploitées. Ces modifications améliorent substantiellement la qualité du schéma, ce que l'on peut voir dans l'étude des courbes de dispersion obtenues dans un milieu homogène (Figures 4.4 et 4.6). Nous allons détailler en quoi consistent ces améliorations.

#### (a) Opérateurs dans un repère tourné



Le choix d'un système de coordonnées, qui définit les directions du maillage, privilégie artificiellement certaines directions. L'évaluation des dérivées spatiales dans un tel système conduit donc nécessairement à l'introduction d'une certaine anisotropie numérique. Pour corriger ce biais, l'idée développée en 2D par Stekl & Pratt (1998) (auparavant suggérée par Cole (1994) et Jo et al. (1996) en acoustique), consiste à utiliser des systèmes de coordonnées "inclinés" de  $45^\circ$  par rapport au maillage. Les schémas de différentiation classiques sont appliqués, dans le nouveau repère, aux noeuds de la nouvelle étoile. Un changement de repère permet alors de réécrire ce schéma dans le système de coordonnées initial, ce qui fournit un nouveau schéma d'ordre 2.

En effectuant ce travail pour les différentes rotations possibles de l'étoile, et en moyennant les résultats obtenus, nous obtenons une évaluation des dérivées qui dépend beaucoup moins de la direction de propagation de l'onde incidente.

L'étoile utilisée doit être topologiquement identique à l'étoile classique à 19 noeuds, et ses noeuds doivent se superposer avec les noeuds du maillage. De plus, chacun des noeuds de la nouvelle étoile doit rester dans le voisinage proche du noeud central, de manière à ne pas trop augmenter la largeur de bande (et le taux de remplissage) de la matrice de rigidité. En 2D, une seule rotation de l'étoile était envisageable. Dans un modèle 3D, trois rotations de l'étoile de  $45^\circ$  sont possibles, autour des axes  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$  respectivement. La Figure 4.3 montre une des rotations possibles. Pour des raisons de symétrie, ces 3 repères se verront attribués le même poids.

Pour exprimer les pondérations des 27 noeuds de l'étoile centrée sur le point  $(x_m, y_n, z_p)$ , nous écrivons les coefficients dans une grille, suivant l'ordre défini ci-dessous, où  $N_{ijk}$  représente le noeud de coordonnée  $(x_{m+i}, y_{n+j}, z_{p+k})$ :

$N_{-1,-1,-1}$	$N_{0,-1,-1}$	$N_{1,-1,-1}$
$N_{-1,0,-1}$	$N_{0,0,-1}$	$N_{1,0,-1}$
$N_{-1,1,-1}$	$N_{0,1,-1}$	$N_{1,1,-1}$
$N_{-1,-1,0}$	$N_{0,-1,0}$	$N_{1,-1,0}$
$N_{-1,0,0}$	$N_{0,0,0}$	$N_{1,0,0}$
$N_{-1,1,0}$	$N_{0,1,0}$	$N_{1,1,0}$
$N_{-1,-1,1}$	$N_{0,-1,1}$	$N_{1,-1,1}$
$N_{-1,0,1}$	$N_{0,0,1}$	$N_{1,0,1}$
$N_{-1,1,1}$	$N_{0,1,1}$	$N_{1,1,1}$

(4.5)

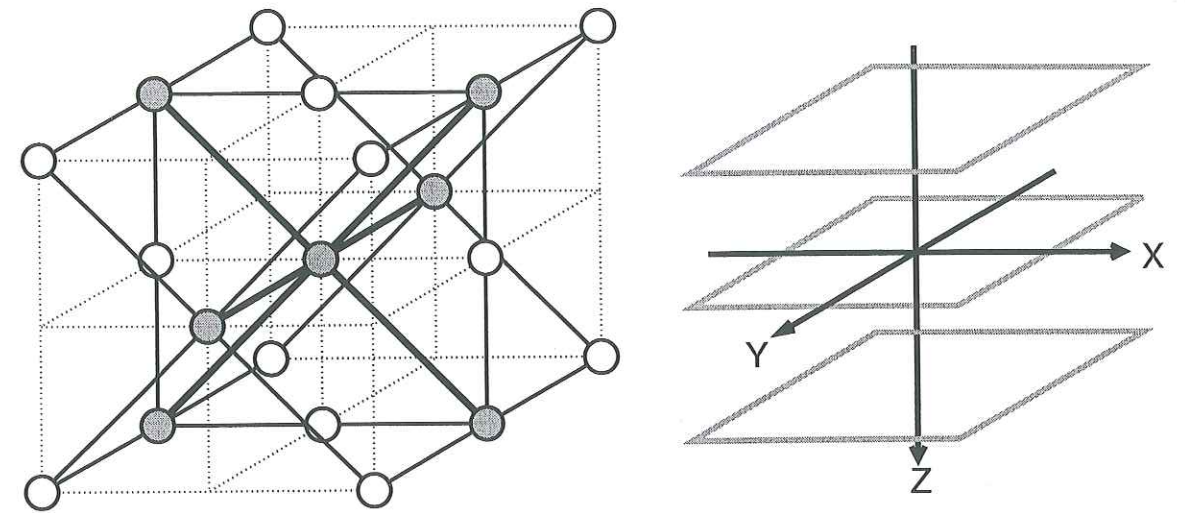


FIG. 4.3 – L'étoile de la Figure 4.1 a été tournée de  $45^\circ$  autour de  $Oy$ . A condition d'ajuster les longueurs de ses cotés, chaque point de l'étoile peut se superposer à nouveau avec un noeud du maillage. Cette étoile "tournée" est utilisée pour améliorer les schémas d'ordre 2 en trois dimensions

Les schémas classiques de différentiation (suivant les axes du maillage) s'écrivent alors:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \simeq \bar{U}_{xx} = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{U} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \simeq \bar{U}_{xy} = \frac{1}{4h^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{U} \quad \text{etc ...} \quad (4.6)$$

où  $\mathbf{U}$  est le vecteur contenant les valeurs de  $u$  prises aux noeuds du maillage.

Dans le cas d'un repère tourné autour de l'axe  $Oz$ , nous utilisons la technique décrite dans Stekl & Pratt (1998) pour obtenir le nouveau schéma de différentiation (cette méthode est détaillée pour le cas hétérogène, dans l'annexe 4.A). Les pondérations obtenues



sont les suivantes:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \simeq \frac{1}{4h^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{U} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \simeq \frac{1}{4h^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{U} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \simeq \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{U} \quad (4.7)$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \simeq \frac{1}{8h^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{U} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \simeq \frac{1}{8h^2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{U} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \simeq \frac{1}{4h^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{U} \quad (4.8)$$

Les dérivées de  $v$  et  $w$  sont obtenues à partir des mêmes schémas, appliqués à  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{W}$  respectivement.

Des opérateurs similaires sont obtenus en effectuant la rotation du repère autour des axes  $Ox$  et  $Oy$ . Comme aucune des 3 rotations n'est à privilégier, les opérateurs finaux sont obtenus en moyennant les 3 versions, ce qui conduit finalement à:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \simeq \hat{U}_{xx} = \frac{1}{12h^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 8 & -16 & 8 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{U} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \simeq \hat{U}_{xy} = \frac{1}{12h^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{U} \quad (4.9)$$

Les termes  $\hat{U}_{yy}$ ,  $\hat{U}_{yz}$  et  $\hat{U}_{xz}$  sont de la même forme, et sont obtenus en opérant les rotations appropriées. Les expressions pour  $\hat{V}_{\alpha\beta}$  et  $\hat{W}_{\alpha\beta}$  sont identiques.

Remarques:

- Cette approche est légèrement différente de celle de Stekl et Pratt, dans le sens où nous ne réécrivons pas seulement les équations de l'Elastodynamique dans un nouveau repère, mais où nous définissons de nouveaux opérateurs de dérivation, grâce au repère tourné. Bien qu'équivalente, cette façon de procéder simplifie les écritures, notamment dans le cas d'un milieu hétérogène.
- Tout ce qui précède est valable dans le cas d'un milieu homogène. Pour un milieu hétérogène, les pondérations elles-mêmes vont dépendre des coefficients élastiques (voir l'annexe 4.A).
- La taille de l'étoile est maintenant de 27 noeuds au lieu de 19. Par rapport à un schéma classique, le remplissage de la matrice  $\mathcal{A}$  est donc augmenté d'environ 40%. Par contre, sa largeur de bande n'est quasiment pas modifiée: elle passe de  $l = 2N^2 + 2N + 1$  à  $l = 2N^2 + 2N + 3$ .

L'opérateur optimisé final sera une combinaison linéaire des deux opérateurs définis précédemment, que l'on écrit à l'aide du coefficient de pondération  $a$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &\simeq U_{xx} = a\bar{U}_{xx} + (1-a)\hat{U}_{xx} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &\simeq U_{xy} = a\bar{U}_{xy} + (1-a)\hat{U}_{xy} \\ &\dots \end{aligned} \quad (4.10)$$

où  $a$  est le même pour tous les opérateurs.

En faisant varier les valeurs du coefficient  $a$ , on observe que les courbes de dispersion obtenues pour les différents angles d'incidence (voir le paragraphe 4.3.4) se resserrent plus ou moins autour d'une courbe moyenne. L'anisotropie du schéma peut être minimisée en choisissant la valeur de  $a$  qui donne les courbes les plus resserrées.

### (b) La condensation de masse

Le terme "condensation de masse" (ou "mass-lumping") vient des méthodes d'éléments finis (Zienkiewicz (1979), p. 580), où la condensation est une opération classique, qui permet de diagonaliser les matrices de masse, simplifiant ainsi l'inversion et améliorant également la précision. Au départ, ce procédé consiste à dire que la masse des éléments



est concentrée, physiquement, aux noeuds du maillage, ce qui explique le terme "condensation". La justification de cette méthode de façon plus mathématique est possible de plusieurs façons: en choisissant des fonctions de formes constantes par morceaux pour le calcul de la matrice de masse, où bien, lors de l'intégration numérique, en prenant les points d'intégration aux noeuds du maillage.

En différences finies, le terme "condensation de masse" est utilisé par Stekl & Pratt (1998) et par Jo & al. (1996) pour désigner l'opération qui consiste à remplacer, dans l'équation de l'Elastodynamique, le terme de masse  $\rho U$  par sa valeur moyennée sur l'ensemble des noeuds du voisinage. Au contraire des éléments finis, on perd donc la diagonalité de la matrice de masse  $\mathcal{M}$ . Ceci est sans importance pour une résolution en fréquence, puisque c'est  $\omega^2 \mathcal{M} + \mathcal{K}$  qui sera inversée, et que la matrice de rigidité  $\mathcal{K}$  n'est de toute façon pas diagonale. En fin de compte, l'utilisation du terme "condensation" n'est plus vraiment appropriée. Néanmoins, cette procédure permet de redresser les courbes de dispersion, et donc améliore la précision du calcul.

Pour des raisons de symétrie, seuls trois coefficients de pondération distincts  $b$ ,  $c$  et  $d$  sont à considérer dans le calcul de la matrice de masse "condensée". Le terme  $\rho u$  est maintenant remplacé par:

$$\rho u \simeq \rho \begin{pmatrix} d/8 & c/12 & d/8 \\ c/12 & b/6 & c/12 \\ d/8 & c/12 & d/8 \\ c/12 & b/6 & c/12 \\ b/6 & 1-b-c-d & b/6 \\ c/12 & b/6 & c/12 \\ d/8 & c/12 & d/8 \\ c/12 & b/6 & c/12 \\ d/8 & c/12 & d/8 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{U} \quad (4.11)$$

L'effet observé, en jouant sur les pondérations, est de modifier l'inclinaison des courbes de dispersion de manière très significative. L'optimisation du choix des paramètres doit permettre de se rapprocher au mieux d'une courbe moyenne horizontale, c'est à dire de minimiser la dispersion moyenne.

Revenons maintenant à la méthode d'optimisation globale de Geller & Takeuchi (1995). Dans un schéma de différences finies, leur méthode peut se traduire la manière suivante: dans l'équation discrétisée 4.3, on peut écrire chacun des opérateurs numériques  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{K}$  comme la somme de l'opérateur exact et d'un terme résiduel:

$$\mathcal{M} = \rho \mathcal{I} + \delta \mathcal{M} \quad \text{et} \quad \mathcal{K} = \mathcal{K}^E + \delta \mathcal{K} \quad (4.12)$$

Chaque mode propre  $(\omega_0, u_0)$  vérifie l'équation Elastodynamique homogène, ce qui peut s'écrire:

$$(\rho \omega_0^2 \mathcal{I} + \mathcal{K}^E) u_0 = 0 \quad (4.13)$$

Le critère d'optimisation global proposé par Geller & Takeuchi (1995), qui doit être vérifié approximativement (i.e. au premier ordre) pour chacun des modes propres, s'écrit:

$$(\omega_0^2 \delta \mathcal{M} + \delta \mathcal{K}) u_0 \simeq 0 \quad (4.14)$$

Le but de l'optimisation est d'ajuster  $\delta \mathcal{M}$  et  $\delta \mathcal{K}$  de manière à pouvoir écrire:

$$(\omega^2 \delta \mathcal{M} + \delta \mathcal{K}) u \simeq \mathcal{H} \underbrace{(\rho \omega^2 + \mathcal{K}^E) u}_J \quad (4.15)$$

où  $\mathcal{H}$  est un opérateur quelconque. Si une telle écriture est possible, alors, comme les modes propres annulent le terme  $J$ , le critère 4.14 est vérifié, et l'on a trouvé les opérateurs optimaux au sens défini par Geller & Takeuchi. La précision du schéma numérique est améliorée car les termes évaluant l'erreur commise sur les opérateurs s'annulent mutuellement (au premier ordre) pour tous les modes propres.

Pour comprendre le lien avec la condensation de masse, examinons le cas 1D homogène pour les ondes SH (qui est examiné par Geller & Takeuchi, 1995). L'équation de l'Elastodynamique s'écrit sous la forme simple:

$$(\rho \omega^2 + \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}) u = 0 \quad (4.16)$$

La dérivée seconde peut être calculée à l'aide de:

$$\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\mathcal{K}^E/\mu} = \underbrace{\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}}_{\mathcal{K}/\mu} - \underbrace{\frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}}_{-\delta \mathcal{K}/\mu} + \dots \quad (4.17)$$

Les développements de Taylor permettent alors d'obtenir une évaluation de  $u$  ayant un terme d'erreur qui soit de la forme voulue:

$$\underbrace{u}_{\mathcal{I}} = \underbrace{\frac{u_{i+1} + 10u_i + u_{i-1}}{12}}_{\mathcal{M}/\rho} - \underbrace{\frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{-\delta \mathcal{M}/\rho} + \dots \quad (4.18)$$

L'intérêt d'utiliser une approximation de  $u$  plutôt que sa valeur exacte apparaît lorsqu'on évalue le critère d'optimisation 4.14:

$$(\omega^2 \delta \mathcal{M} + \delta \mathcal{K}) u \simeq \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\rho \omega^2 + \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}) u \quad (4.19)$$



qui est de la forme recherchée (équation 4.15), avec  $\mathcal{H} = \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ .

L'optimisation a été obtenue en effectuant une répartition du terme de masse sur les noeuds adjacents. Ceci correspond exactement au procédé de "condensation" de masse, et peut permettre de comprendre la raison de son efficacité.

Nous allons donc examiner la possibilité que l'adaptation de cette méthode au cas 3D puisse fournir un moyen de déterminer les coefficients optimaux  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  cités plus haut.

La formulation des opérateurs 3D optimaux dans le domaine temporel a été donnée par Takeuchi & Geller (1998). Les schémas en fréquence sont plus simples à déterminer, puisque les opérateurs font intervenir une variable de moins: les champs à calculer ne varient que spatialement. Les opérateurs déterminés par Takeuchi & Geller (1998) pour les schémas en temps peuvent ainsi être réutilisés pour les schémas en fréquence, à condition de ne conserver que la partie spatiale des opérateurs (en comprimant la dimension temps).

Le problème est que la détermination des termes de dérivées croisées nécessite l'utilisation de noeuds n'appartenant pas à l'étoile à 27 noeuds de départ. Geller & Takeuchi (1995) montrent que, dans le cas 2D pour les ondes P-SV, la largeur de bande de la matrice de rigidité n'est pas modifiée si l'on procède habilement. Ce n'est plus possible en trois dimensions.

Dans un premier temps, on peut comparer les résultats donnés par les deux méthodes pour un modèle 2D homogène. L'optimisation globale conduit, en utilisant les notations de Stekl & Pratt (1998), à la valeur  $b = 100/144 \simeq 0.69$ , ce qui est proche des valeurs obtenues par ces derniers. Pour les opérateurs  $U_{xx}$  et  $U_{yy}$ , toujours avec les notations de Stekl & Pratt, on est conduits à un coefficient de pondération  $a = 2/3 \simeq 0.67$ , qui s'éloigne de la valeur 0.38 qu'ils obtenaient. De plus,  $U_{xy}$  est évalué sur une étoile plus large que l'étoile de base à 9 noeuds, et ne peut donc s'écrire à partir des opérateurs classiques et des opérateurs tournés seuls.

Le développement des schémas 3D pour un modèle homogène permet en fin de compte de trouver pour la matrice de masse, avec les notations de l'équation 4.11:

$$\begin{aligned} b &= 50/144 \simeq 0.347 \\ c &= 5/72 \simeq 0.069 \\ \text{et } d &= 1/216 \simeq 0.005 \end{aligned} \quad (4.20)$$

ce qui s'écrit sous une forme plus homogène:

$$\rho u \simeq \frac{1}{1728} \begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 10 & 100 & 10 \\ 1 & 10 & 1 \\ 10 & 100 & 10 \\ 100 & 1000 & 100 \\ 10 & 100 & 10 \\ 1 & 10 & 1 \\ 10 & 100 & 10 \\ 1 & 10 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{U} \quad (4.21)$$

Par contre, les opérateurs de dérivées spatiales secondes ne peuvent être écrits comme combinaisons linéaires des  $\hat{U}_{\xi\eta}$  et  $\bar{U}_{\xi\eta}$ . Ils s'écrivent:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \simeq \frac{1}{144 h^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 10 & -20 & 10 \\ 1 & -2 & 1 \\ 10 & -20 & 10 \\ 100 & -200 & 100 \\ 10 & -20 & 10 \\ 1 & -2 & 1 \\ 10 & -20 & 10 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{U} \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \simeq \frac{1}{1728 h^2} \begin{bmatrix} & & & x_{m-1} & x_m & x_{m+1} & x_{m+2} \\ & & & y_{n-1} & y_n & y_{n+1} & y_{n+2} \\ z_{p-1} & & & 25 & 15 & -45 & 5 \\ & & & 15 & 9 & -27 & 3 \\ & & & -45 & -27 & 81 & -9 \\ & & & 5 & 3 & -9 & 1 \\ & & & 250 & 150 & -450 & 50 \\ & & & 150 & 90 & -270 & 30 \\ & & & -450 & -270 & 810 & -90 \\ & & & 50 & 30 & -90 & 10 \\ & & & 725 & 15 & -45 & 5 \\ z_{p+1} & & & 15 & 9 & -27 & 3 \\ & & & -45 & -27 & 81 & -9 \\ & & & 5 & 3 & -9 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{U} \quad (4.23)$$



où, pour la dernière grille, la taille de l'étoile est étendue et recouvre maintenant le domaine  $[x_{m-1}, x_{m+2}] \times [y_{m-1}, y_{m+2}] \times [z_{m-1}, z_{m+1}]$ .

L'expression de  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  (équation 4.22) peut être obtenue, si on néglige les termes en  $1/144$  et en  $-2/144$ , comme combinaison linéaire des seuls  $\hat{U}_{xx}$  et  $\bar{U}_{xx}$ , avec un coefficient  $a \simeq 0.14$ .

Notons que, au contraire de la méthode rotation-condensation, le schéma optimum ne dépend pas du coefficient de Poisson  $\sigma$ .

#### 4.3.4 Optimisation du schéma de différences finies d'ordre 2

L'évaluation de la qualité des schémas de différences finies passe par la construction de courbes de dispersion. Ces courbes sont obtenues en considérant des ondes planes de nombre d'onde  $k$  et de direction de propagation données, et en écrivant qu'elles vérifient l'équation d'onde discrète écrite en un noeud du maillage. Cela donne une contrainte sur la vitesse de phase  $v = \omega/k$ , sous la forme d'un déterminant  $3 \times 3$  à annuler:  $\det(\omega^2 I + B) = 0$ . En 3D, on obtient 3 solutions positives pour la vitesse de phase numérique:  $\hat{v}_{Pph}$ ,  $\hat{v}_{S1ph}$  et  $\hat{v}_{S2ph}$  correspondants pour la première à l'onde P et pour les 2 suivantes aux ondes S (puisque les ondes S correspondent à deux vecteurs propres du système: SV et SH par exemple). Les rapports entre les vitesses de phase obtenues et les vitesses des ondes (P ou S respectivement) correspondants aux paramètres élastiques du milieu, fournissent une évaluation de la dispersion.

En répétant cette opération pour différentes longueurs d'onde, on obtient des courbes de dispersion de la vitesse de phase, où les valeurs que prennent les rapports  $\frac{\hat{v}_{ph}}{v}$  sont représentées en fonction du nombre d'onde normalisé  $K_s = \frac{k_s h}{2\pi}$  (qui est aussi l'inverse de  $G_s$ , le nombre de points par longueur d'onde S). Les courbes de dispersion pour les vitesses de groupe  $\hat{v}_{Pgr}$ ,  $\hat{v}_{S1gr}$  et  $\hat{v}_{S2gr}$  sont obtenues par dérivation numérique:

$$\hat{v}_{gr} = \frac{\partial(k\hat{v}_{ph})}{\partial k} = \frac{\partial(K_s \hat{v}_{ph})}{\partial K_s} \quad (4.24)$$

Les courbes de dispersion obtenues avec le schéma classique et celles obtenues en utilisant les opérateurs fournis par la méthode d'optimisation globale sont représentées respectivement sur les Figures 4.4 et 4.5. Les courbes de dispersion que l'on montre correspondent à différentes valeurs de  $\theta$  (l'inclinaison de l'onde plane par rapport à  $Oz$ ) pour une valeur de l'azimut  $\phi$  fixée à  $0^\circ$ .

Dans la méthode rotation-condensation, on cherche à ajuster au mieux les courbes

de dispersion pour les différentes directions de propagation de l'onde, en jouant sur les paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$ . Le but est d'obtenir des courbes qui s'éloignent le moins possible de la valeur 1, et qui soient le plus isotrope possible.

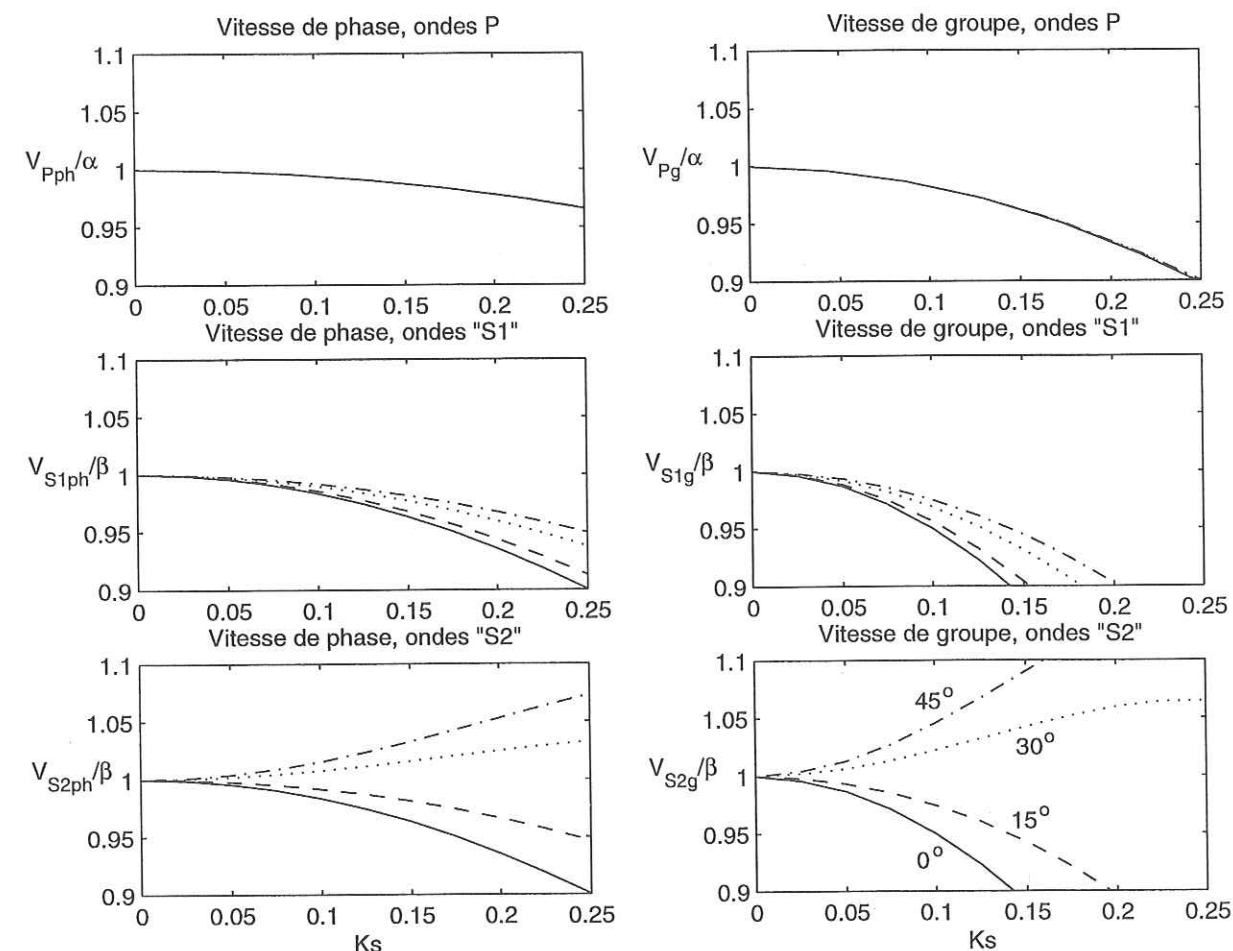


FIG. 4.4 – Courbes de dispersion obtenues avec un schéma 3D classique (i.e.  $a = 1.$ ,  $b = 0.$ ). Sur chaque graphique, sont représentées quatre courbes correspondant aux différentes valeurs de l'inclinaison  $\theta$  de l'onde incidente par rapport à l'axe  $Oz$ :  $\theta = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ . L'azimut  $\phi$  est fixé à  $0^\circ$ . En abscisse, le nombre d'onde normalisé  $K_s$  des ondes S.

La méthode d'optimisation utilisée suit de très près celle proposée par Stekl & Pratt (1998). Pour un coefficient de poisson donné, la fonction coût suivante est à minimiser:

$$F(a, b, c, d) = \int_0^{0.25} dK \int_0^{\pi/4} d\phi \int_0^{\pi/2} C(a, b, c, d, K, \phi, \theta) \sin \theta d\theta \quad (4.25)$$

$$C(a, b, c, d, K, \phi, \theta) = \max \left( \left| 1 - \frac{\hat{v}_{Pgr}}{\alpha} \right|^2, \left| 1 - \frac{\hat{v}_{S1gr}}{\beta} \right|^2, \left| 1 - \frac{\hat{v}_{S2gr}}{\beta} \right|^2 \right) \quad (4.26)$$



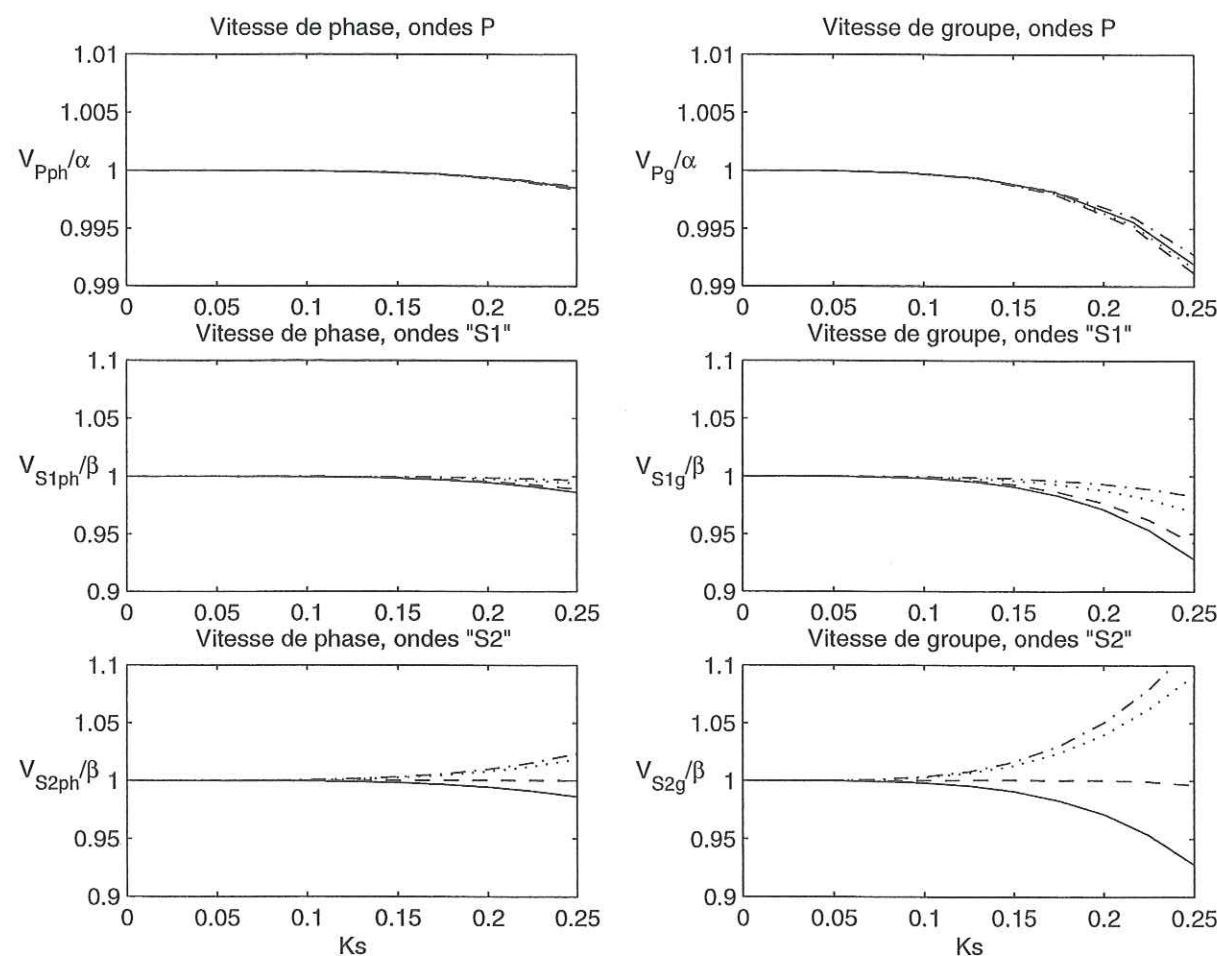


FIG. 4.5 – Courbes de dispersion obtenues avec un schéma 3D optimisé globalement. Sur chaque graphique, sont représentées quatre courbes correspondant aux différentes valeurs de l'inclinaison  $\theta$  de l'onde incidente par rapport à l'axe  $Oz$ :  $\theta = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ . L'azimut  $\phi$  est fixé à  $0^\circ$ . En abscisse, le nombre d'onde normalisé  $K_s$  des ondes  $S$ . Remarque: attention au choix des ordonnées différent pour les courbes de dispersion des ondes  $P$ .

Le schéma sera donc optimisé pour l'ensemble des directions de propagation possibles, et pour des valeurs de  $G_s$  supérieures à 4.  $G_s = 4$  correspond à la valeur qu'utilisent Stekl & Pratt (1998) avec leur schéma 2D optimisé. C'est aussi celle que nous considérons pour les éléments de frontière. On peut donc se restreindre, pour l'optimisation, à des valeurs de  $K$  prises dans l'intervalle  $[0., 0.25]$ .

Les valeurs des paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  sont cherchées parmi les valeurs positives qui vérifient  $a < 1$  et  $b + c + d < 1$ . L'optimisation procède par une recherche systématique

sur un quadrillage régulier de l'espace des paramètres ("grid search"). La recherche est affinée progressivement, en restreignant le domaine de recherche en même temps que la taille de la maille de la grille.

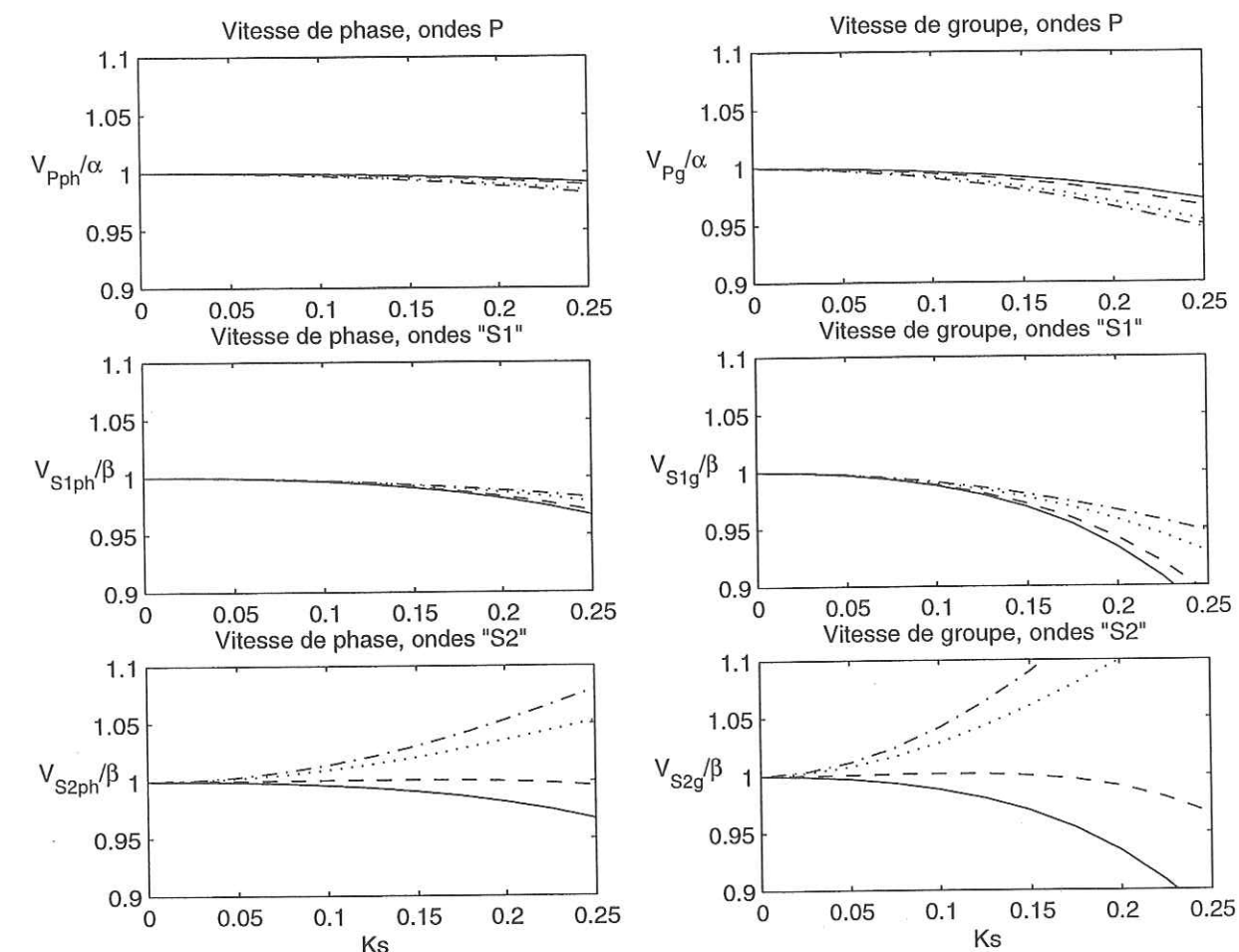


FIG. 4.6 – Courbes de dispersion obtenues avec les coefficients optimaux:  $a = 0.05$ ,  $b = 0.40$ ,  $c = 0$  et  $d = 0$ . Sur chaque graphique, sont représentées quatre courbes correspondant aux différentes valeurs de l'inclinaison  $\theta$  de l'onde incidente par rapport à l'axe  $Oz$ :  $\theta = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ . L'azimut  $\phi$  est fixé à  $0^\circ$ . En abscisse, le nombre d'onde normalisé  $K_s$  des ondes  $S$ .

Les tests numériques ont montré que les paramètres  $c$  et  $d$  devaient se voir attribuer des valeurs faibles, et que de toute façon leur valeur exacte n'avait pas une incidence très importante sur les courbes de dispersion. Leur valeur a donc été fixées à 0, ce qui a permis de nous ramener à une optimisation à deux paramètres:  $a$  et  $b$ . Pour un coefficient de Poisson  $\sigma = 0.25$ , les valeurs optimales des coefficients de pondération obtenues sont:  $a \approx 0.05$ ,  $b \approx 0.40$ ,  $c \approx 0$  et  $d \approx 0$ . Les courbes de dispersion associées à ces coefficients



optimaux sont représentées sur la Figure 4.6.

Bien sûr, ces courbes de dispersion n'évaluent la précision d'un schéma que dans le cas d'un milieu homogène. Néanmoins, on peut sans doute considérer que les schémas obtenus ne sont pas loin d'être également optimaux quand le milieu est hétérogène.

En conclusion, le schéma obtenu par la méthode d'optimisation globale est clairement le meilleur. Par contre, il ne rentre plus dans le cadre des schémas d'ordre 2, avec une "étoile" à taille limitée. En effet, ce schéma fait intervenir pas moins de  $4^3 = 64$  noeuds par étoile. Nous préférons donc utiliser le schéma obtenu grâce à la méthode "rotation-condensation" qui, bien que moins précis, n'utilise que 27 points par étoile, d'où un gain important en temps de calcul.

De plus, la précision obtenue est tout de même comparable à celle donnée par un schéma d'ordre 4 "classique" (voir annexe 4.B), alors que le nombre de noeuds utilisés, ainsi que la largeur de bande, sont réduits (37 noeuds pour le schéma d'ordre 4).

## 4.4 Résolution du système par une méthode itérative

La discrétisation des équations de l'Elastodynamique et des conditions aux limites conduit finalement à la résolution d'un système de la forme  $AX = B$ , où  $A$  est une matrice creuse de très grande dimension ( $3N^3 \times 3N^3$ ,  $N$  étant le nombre de noeuds du maillage dans chaque direction).

*Remarque:* l'écriture de l'équation d'onde discrétisée elle-même ne fait intervenir que des quantités réelles. On verra que l'introduction de bords absorbants et d'une fréquence complexe anti-repliement fait apparaître des valeurs complexes. La résolution du système obtenu doit finalement s'effectuer dans le domaine des complexes.

Si, en chaque noeud du maillage, l'écriture en différences finies de l'équation des ondes élastiques (ou visco-élastiques) fait intervenir  $n_e$  noeuds du voisinage, la matrice  $A$  comporte  $3n_e \times 3N^3 = 9n_e N^3$  coefficients non nuls à stocker. Pour les deux schémas développés précédemment (par optimisation globale et par rotation-condensation), les valeurs de  $n_e$  sont respectivement  $n_e = 64$  et  $n_e = 27$ . La taille mémoire croît comme  $N^3$  au lieu de  $N^6$  pour une matrice pleine, le gain est donc considérable.

Cependant, la résolution directe d'un système linéaire aussi gros pose des problèmes de précision, de dépassement de la taille mémoire et de temps de calcul. En renumérotant les noeuds du maillage, il est possible de réarranger la matrice  $A$  de telle manière que la

résolution du système soit facilitée. Un exemple en est la méthode dite "nested dissection", utilisée par Stekl (1997), d'après George and Liu (1981): la matrice  $A$  est réarrangée de façon à obtenir une matrice bloc-diagonale à bordures, dont la décomposition LU conserve une forme identique (les matrices triangulaires  $L$  et  $U$  sont donc très creuses). Cela réduit les exigences en mémoire et en temps calcul, mais induit un coût important de renumérotation des noeuds, processus lourd même en 2D.

Nous préférons utiliser une méthode de résolution itérative, bien adaptée à la résolution des gros systèmes creux. Les méthodes itératives stationnaires fonctionnent sur le principe suivant: une valeur de départ  $X_0$ , arbitraire, est choisie, puis les valeurs de la suite des  $(X_k)$  sont calculées par itérations successives grâce à

$$X_{k+1} = X_k + M^{-1}(B - AX_k) \quad (4.27)$$

où  $(B - AX_k)$  est le résidu, c'est à dire une évaluation de l'erreur commise en supposant  $X = X_k$ . Intuitivement,  $M$  doit être choisie "la plus proche possible" de  $A$ , de manière à ce que son inversion effectue déjà une partie importante du travail. En même temps, l'inversion de  $M$  doit être facile, c'est à dire, plus exactement, que le système

$$MX_{k+1} = B + (M - A)X_k \quad (4.28)$$

obtenu en multipliant l'équation 4.27 par  $M$  et en la réorganisant, doit se résoudre de manière immédiate.

Sous certaines conditions sur  $A$ , dépendantes de la méthode de construction de  $M$ , la suite des  $X_k$  converge vers la solution de  $X$ . L'exemple le plus simple de méthode itérative est la méthode de Jacobi, qui ne permet par contre qu'une convergence très lente. Dans cette méthode,  $M$  est la matrice diagonale ayant comme coefficients les coefficients diagonaux de  $A$ . Sous réserve que ces coefficients soient tous non nuls, l'inversion de  $M$  est triviale.

L'intérêt particulier des méthodes itératives est leur capacité à exploiter pleinement le caractère creux de la matrice  $A$ . En effet, même avec des méthodes itératives plus évoluées (méthodes non stationnaires par exemple), les ajustements successifs des valeurs de  $X_k$  ne nécessitent l'utilisation de  $A$  (et éventuellement de sa transposée) que pour effectuer des produits matrice  $\times$  vecteur. On peut donc utiliser une forme de stockage adapté de la matrice  $A$ , qui permette de limiter la mémoire nécessaire et également d'améliorer l'efficacité du calcul (en évitant toutes les multiplications par des coefficients nuls).



### 4.4.1 Choix d'une méthode itérative

De nombreuses méthodes itératives ont été développées, les plus efficaces étant les méthodes non stationnaires, où la matrice  $M$  est variable d'une itération à l'autre, et dépend des résultats précédents. Parmi les plus utilisées, on peut citer: la méthode du Gradient Conjugué (CG), le Gradient Bi-Conjugué (BiCG), la méthode du Résidu Minimum (MINRES) et celle du Résidu Minimum Généralisé (GMRES). Il n'existe pas, dans l'absolu, de "meilleure méthode". Le choix d'une méthode dépend complètement de la forme et des propriétés de la matrice à inverser. Dans notre cas, la matrice  $A$  n'est pas symétrique, ce qui élimine par exemple l'emploi de la méthode du Gradient Conjugué ou du Résidu Minimum.

Trois méthodes semblent a priori bien adaptées à notre problème: BiCG, GMRES et BiCGStab (Gradient Bi-Conjugué Stabilisé). Ces méthodes sont standards et on les trouve dans de nombreuses bibliothèques d'algèbre linéaire, pour des matrices réelles. En complexe, elles sont moins courantes, et nous n'avons pas pu disposer de la méthode BiCGstab, qui semblait peut-être la plus adaptée. La méthode BiCG s'avère rapide et économique en mémoire, par contre elle nécessite des multiplications sur  $A$  et sur sa transposée. L'obtention de cette dernière demande parfois quelques calculs supplémentaires, en raison de l'utilisation de méthodes de stockage adaptées aux matrices creuses. De plus, cette méthode n'est pas toujours stable et la convergence n'est pas assurée. L'intérêt de BiCGStab est que justement elle élimine ce dernier inconvénient de la méthode.

GMRES est une méthode plus robuste, mais nécessite beaucoup de mémoire. Elle généralise à des matrices non symétriques la méthode MINRES, qui est elle-même une variante de la méthode BiCG applicable à des matrices indéfinies. Sa convergence est assurée, mais est beaucoup plus lente qu'avec BiCG. Elle est très sensible à l'utilisation du préconditionnement: la convergence, si elle est assurée, ne l'est qu'au bout d'un temps très long (on fait parfois du "sur place"). L'utilisation d'un préconditionnement, même simple (style Jacobi), peut permettre de débloquer la situation. La vitesse de convergence de la méthode dépend également de la mémoire que l'on peut allouer: pour être efficace, elle nécessite de conserver en mémoire des informations sur toutes les itérations précédentes, ce qui peut demander autant de mémoire que le stockage de la matrice elle-même.

Finalement, on opte plutôt pour GMRES, avec un préconditionnement par une matrice de Jacobi, qui permet d'assurer une convergence suffisamment rapide.

*Remarque:* Les méthodes de résolution itératives nécessitent le choix d'une valeur de départ  $X_0$ . A priori, plus cette valeur est proche de la solution  $X$ , plus vite sera obtenue la convergence (cela n'est en fait pas vrai pour certaines méthodes, par exemple CGS).

Comme l'inversion doit être réalisée sur toute une gamme de fréquences, et comme on peut espérer que la solution  $X(\omega)$  varie relativement doucement en fonction de  $\omega$ , nous proposons le critère de choix suivant pour  $X_0$ : on commence par résoudre le système pour les fréquences les plus basses (qui nécessitent une discrétisation moins fine et donc un temps de calcul plus petit). Le résultat obtenu pour une fréquence donnée est ensuite utilisé comme point de départ pour le calcul de la fréquence suivante. La corrélation entre fréquences proches permet ainsi d'accélérer le processus de résolution. Une extrapolation d'ordre plus élevé pourrait permettre éventuellement d'obtenir une meilleure estimation de  $X_0$ , mais la gain serait alors minime.

### 4.4.2 Méthodes de stockage adaptées à une matrice creuse

Différentes méthodes de stockage, permettent d'utiliser le caractère creux de la matrice  $A$  pour limiter la mémoire requise. Ces méthodes permettent également, lors d'une multiplication par un vecteur par exemple, d'éviter d'effectuer de nombreuses multiplications scalaires avec des coefficients nuls. Par contre, l'indexation plus ou moins complexe utilisée peut ralentir le calcul. Plusieurs formes de stockage standards ont été testées sur la réalisation d'un produit matrice  $\times$  vecteur, avec des matrices ayant la forme de celles données par notre schéma de différences finies (Figure 4.2).

Un format simple et assez rapide (si les boucles du calcul sont optimisées, par exemple avec un préprocesseur) est le format ELL, qui stocke les coefficients de la matrice lignes par lignes, dans un tableau ayant pour largeur le plus grand nombre de coefficients rencontré sur une même ligne. Ce stockage n'est efficace que si chaque ligne comporte à peu près le même nombre de coefficients, ce qui est le cas des méthodes de Différences Finies.

La méthode CSR stocke tous les éléments non nuls dans un tableau à une dimension, et deux tableaux annexes permettent de retrouver la ligne et la colonne correspondant à chacun des coefficients. La méthode de stockage la plus rapide et demandant le moins de mémoire est la méthode MSR, qui utilise un système d'indexation plus sophistiqué, nécessitant un tableau d'indices en moins. Notons que dans cette méthode, les termes diagonaux sont stockés les premiers, ce qui permet d'y accéder facilement, et est utile par exemple pour le préconditionnement de Jacobi.

Une amélioration a été apportée à la méthode ELL (mais elle pourrait aussi fonctionner sur les autres méthodes). Elle permet de gagner aussi bien de la place en mémoire que du temps de calcul, et consiste à tenir compte des zones homogènes de la matrice, et à reporter dans une table d'indexation toutes les lignes de la matrice ayant les mêmes



coefficients. Cela revient à utiliser le fait que, dans un milieu homogène, le schéma de différentiation s'écrit en tout points de manière identique.

#### 4.4.3 Accélération de la convergence: préconditionnement

La vitesse de convergence des méthodes itératives dépend très fortement des valeurs propres  $\lambda_i$  de la matrice  $A$ , et la précision numérique du résultat obtenu est dépendante du "condition number", défini comme le rapport  $c = \lambda_{max}/\lambda_{min}$ . Pour assurer la meilleure précision et la convergence la plus rapide,  $c$  doit être aussi petit que possible. Un moyen de diminuer la valeur de  $c$  est d'appliquer un préconditionnement au système  $AX = B$ , en l'écrivant sous la forme  $W^{-1}AX = W^{-1}B$ , où  $W$  est une matrice facilement inversible (au sens: le système  $WX = Y$  est rapide à résoudre) et  $W^{-1}A$  a par construction un "condition number" plus proche de 1. Avec les notations définies précédemment (équation 4.28), l'algorithme de résolution itérative s'écrit  $MX_{k+1} = W^{-1}B + (M - W^{-1}A)X_k$ , ce qui donne après multiplication par  $W$ :

$$WMX_{k+1} = B + (WM - A)X_k \quad (4.29)$$

On ajoute donc une étape à chaque itération, qui est la résolution d'un système linéaire en  $W$ , mais la vitesse de convergence est améliorée.

De nombreuses possibilités de préconditionnement existent. Cependant, le gain qu'elles procurent sur le nombre d'itérations avant d'obtenir la convergence, est parfois plus que compensé par l'augmentation du coût de calcul d'une itération. Le préconditionnement de Jacobi, qui utilise comme matrice  $W$  la matrice diagonale constituée des inverses des termes diagonaux de  $A$ , constitue sans doute la méthode la plus simple, mais permet déjà d'améliorer nettement la convergence. D'autres méthodes ont été testées, comme par exemple la méthode de factorisation LU incomplète d'ordre 0, qui ne conserve dans la décomposition LU de la matrice  $A$ , que les termes situés à l'emplacement des termes non-nuls de  $A$ . Cela multiplie déjà par deux la mémoire requise, et par beaucoup plus le temps de calcul d'une itération. Finalement, le gain de l'opération est à peu près nul. Une méthode de préconditionnement adaptée plus spécialement au type de problème que nous résolvons serait sans doute nécessaire.

### 4.5 Validation du schéma de Différences Finies 3D

Un code de différences finies en fréquence a été écrit en utilisant le schéma de différentiation d'ordre 2 (optimisé par rotation-condensation) et permettant l'emploi de différentes

méthodes d'inversion itératives. Actuellement, la méthode GMRES est utilisée, combinée avec un stockage des matrices creuses de type ELL modifié, et un préconditionnement de Jacobi quand la convergence est lente (celle-ci dépend entre autre de la taille du modèle choisi). Les tests de validation sont effectués avec un milieu homogène, de forme cubique, et des bords absorbants sur toutes les faces. Le traitement de la surface libre sera, dans une deuxième étape, l'objet du couplage avec les éléments de frontière.

#### 4.5.1 Implémentation de la source

La source est considérée comme ponctuelle. Elle peut soit être une force, dont l'implémentation est directe, soit un tenseur des moments quelconque. Dans ce cas, l'implémentation est réalisée (en suivant Moczo, 1998), par l'application de forces ponctuelles équivalentes, aux noeuds du voisinage. Cette technique a été utilisée par Frankel & Vidale (1992) dans le code de différences finies 3D en déplacement qu'ils ont développé.

Une autre façon de procéder est de considérer que le milieu est homogène sur le volume de la cellule entourant le point source, et d'imposer le déplacement aux noeuds de cette cellule, en utilisant les valeurs données par les fonctions de Green.

#### 4.5.2 Bords absorbants

Pour simuler un milieu infini, l'introduction de bords absorbants est nécessaire. Une simple apodisation spatiale, comme celle que nous avons utilisé pour les méthodes d'éléments de frontière (et comme il a été proposé par Cerjan & al., 1985), ou bien l'emploi de milieux atténuants sur les bords, ne peuvent suffire à cet objectif. En effet, en utilisant une formulation en fréquence et non en temps, les conditions aux limites doivent servir à empêcher les réflexions parasites aux bords du modèle, mais également à imposer le sens de propagation des ondes. Sans cela, elles se propagent aussi bien vers les temps négatifs que vers les temps positifs, c'est à dire que l'on construit des ondes qui s'éloignent de la source, et d'autres, non causales, qui y convergent.

De plus, si les conditions de bords absorbants ne sont pas suffisamment efficaces, la résolution dans le domaine des fréquences résout simultanément la propagation transitoire et stationnaire. Les conditions de bords ont donc un rôle beaucoup plus important que lors d'une résolution en temps, où les modes de résonance n'apparaissent pas immédiatement.

Les méthodes basées sur une approximation paraxiale de l'équation des ondes aux bords du modèle permettent de réaliser correctement l'implémentation de ces conditions,



car elles consistent explicitement à imposer le sens de propagation, pour les ondes à incidence normale sur les bords (Clayton & Engquist, 1977; Stacey, 1988). De nombreuses autres méthodes remplissent ces conditions, et nous utilisons celle proposée par Higdon (1991). Higdon définit un opérateur s'appliquant uniquement sur des lignes de noeuds perpendiculaires aux bords, et s'annulant exactement pour les ondes planes ayant des directions et des vitesses de propagation données. Cela peut éventuellement permettre d'ajuster les paramètres de bords absorbant à une connaissance a priori de la direction des ondes incidentes, mais fonctionne de manière très générale avec des paramètres moyens (ondes P et ondes S à incidence normale par exemple). De plus les arêtes et les coins du modèle ne nécessitent pas la définition de conditions de bords plus particulières.

Pour permettre une bonne atténuation des réflexions et éliminer les arrivées non causales, la méthode de Higdon à l'ordre 4 est appliquée. L'écriture explicite de ces conditions correspond à la discrétisation, en tous les points de la frontière, de l'équation:

$$\left(\theta_1 i\omega - \alpha \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\theta_2 i\omega - \alpha \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\theta_3 i\omega - \alpha \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\theta_4 i\omega - \alpha \frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0 \quad (4.30)$$

écrite ici pour une frontière  $x = 0$ , un domaine  $x > 0$ , et un déplacement  $u = u(\mathbf{x})e^{i\omega t}$ . Le choix des  $\theta_i$  permet de s'adapter à des angles d'incidences variés.

### 4.5.3 Le repliement en temps: usage d'une fréquence complexe

L'utilisation du domaine fréquentiel pour résoudre les équations de l'Elastostatique a comme autre petit inconvénient, si l'on n'y prend garde, l'apparition de signaux indésirables à la fin du sismogramme. En effet, la discrétisation des fréquences (avec un pas  $\Delta\nu$ ) entraîne un repliement du signal dans le domaine temporel, si des ondes se propagent plus longtemps que le temps  $t_{max} = 1/\Delta\nu$  ou si des ondes non causales sont obtenues. Pour atténuer cet effet, un procédé classique est d'effectuer les calculs en utilisant une fréquence complexe  $\omega' = \omega + i\gamma$  à la place de la fréquence réelle  $\omega$ . Après calcul de la FFT inverse, l'amplitude du signal temporel obtenu doit être corrigée d'un facteur multiplicatif  $e^{-\gamma t}$ . NB: Ceci est vrai en adoptant la convention suivante pour la transformée de Fourier:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (4.31)$$

En choisissant une valeur négative pour  $\gamma$ , cette correction joue le rôle d'un filtre anti-repliement (Stekl, 1997): en effet, la partie repliée du signal n'est pas corrigée d'un facteur suffisant, ce qui atténue son amplitude. Attention: il faut être sûr de ne pas avoir d'ondes non causales, car le repliement des ondes se propageant aux temps négatifs est par contre amplifié.

*Remarque:* de la valeur de  $\gamma$  choisie va dépendre l'atténuation plus ou moins forte du repliement, mais aussi la vitesse de convergence de l'inversion itérative. L'emploi d'une fréquence complexe permet en effet d'éviter les modes propres de résonance de la structure, dans le cas où les conditions de bord absorbant ne sont pas efficaces.

### 4.5.4 Résultats

La mise en oeuvre de la méthode montre l'extrême importance d'une implémentation correcte des conditions de bords absorbants et de l'atténuation du repliement temporel. La méthode de Higdon utilisée pour les conditions de bords doit être implémentée avec un schéma d'ordre 4. Les schémas d'ordre inférieurs ne permettent pas la convergence de l'inversion, à cause de l'excitation trop importante des modes de résonance. Des méthodes plus sophistiquées existent et seront peut-être à utiliser, comme par exemple celle du PML (Perfectly Matched Layer, Hastings et al., 1995; Collino et Tsogka, 1998).

Les premiers calculs réalisés montrent que le schéma numérique optimisé avec la méthode de rotation-condensation donne des résultats très différents de ceux obtenus en employant un schéma classique (Figures 4.7 et 4.8). Sur ces figures, sont représentés les déplacements obtenus en modélisant un milieu homogène ( $\alpha = 6000 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $\sigma = 0.25$ ) sur une grille de  $71 \times 71 \times 71$  noeuds, enregistrés sur une ligne verticale de récepteurs, pour l'application d'une force ponctuelle horizontale.

La fonction source utilisée est un Ricker de période centrale  $T_0 = 20 \text{ s}$ , et le pas de discrétisation vaut  $h = 12000 \text{ m}$ , donc la discrétisation est fait à 5.8 points par longueur d'onde S centrale (2.3 points par longueur d'onde S minimale). Les bords absorbants ont été simulés à l'aide de la méthode de Higdon à l'ordre 4, et la fréquence complexe utilisée est  $\gamma = 4\pi/T_l$ , où  $T_l = 200 \text{ s}$  est la longueur du sismogramme.

Les figures que nous montrons indiquent clairement une dispersion moindre avec le schéma optimisé, notamment en ce qui concerne les ondes S. Les conditions d'absorption aux bords sont relativement bien réalisées, mais on observe tout de même des petites réflexions parasites.

*Remarque:* on constate également que l'emploi du schéma d'ordre 2 optimisé, en même temps qu'il diminue la dispersion, permet d'accélérer la convergence de l'inversion par rapport au schéma classique (les matrices sont mieux conditionnées).



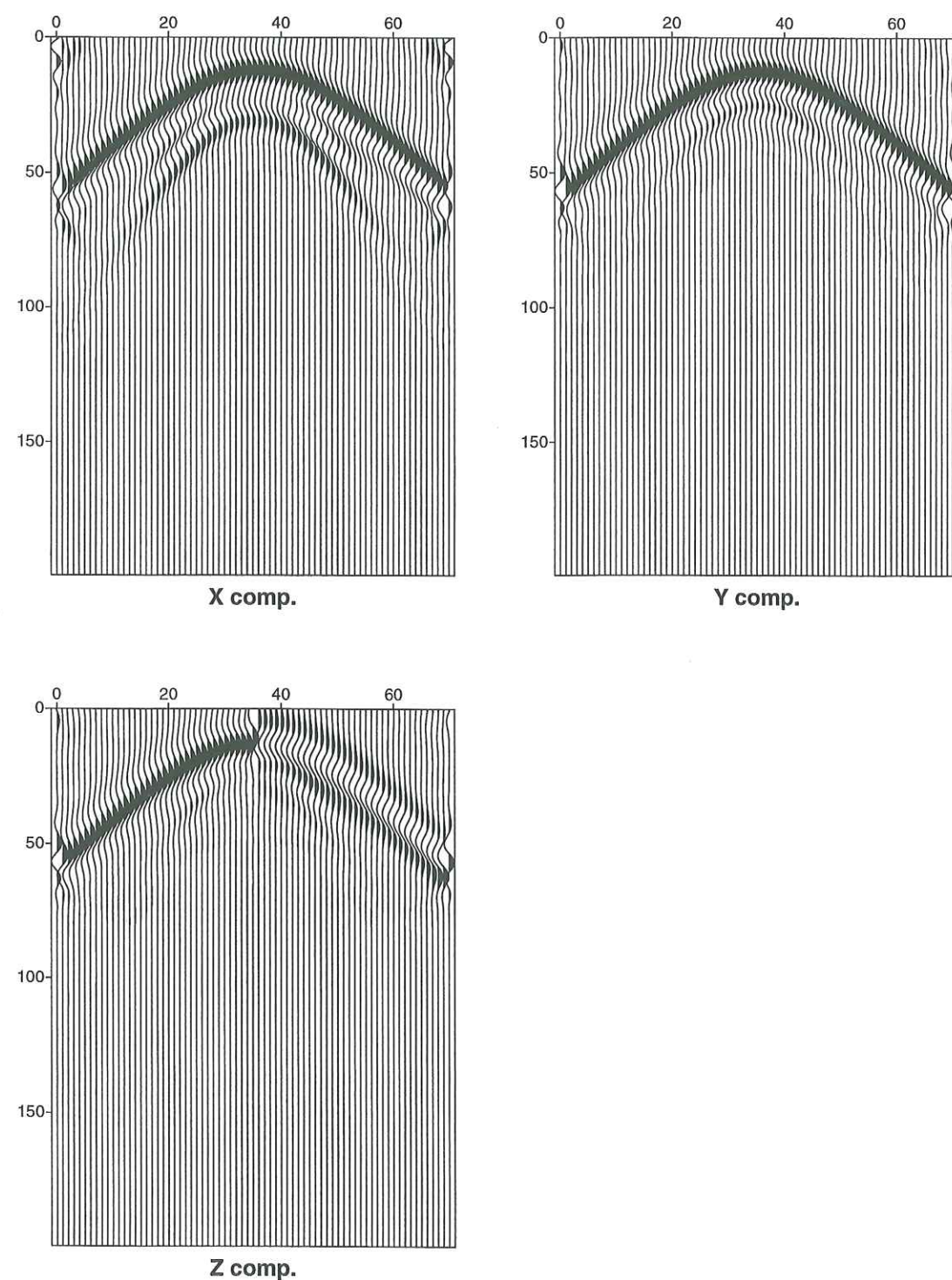


FIG. 4.7 – Propagation en Différences Finies avec le schéma optimisé par rotation-condensation. La grille utilisée comporte  $71 \times 71 \times 71$  noeuds, avec un pas de discrétisation  $h=12000$  m et des paramètres élastiques  $\alpha = 6000$  m.s<sup>-1</sup> et  $\sigma = 0.25$ . Les sismogrammes sont normalisés par traces.

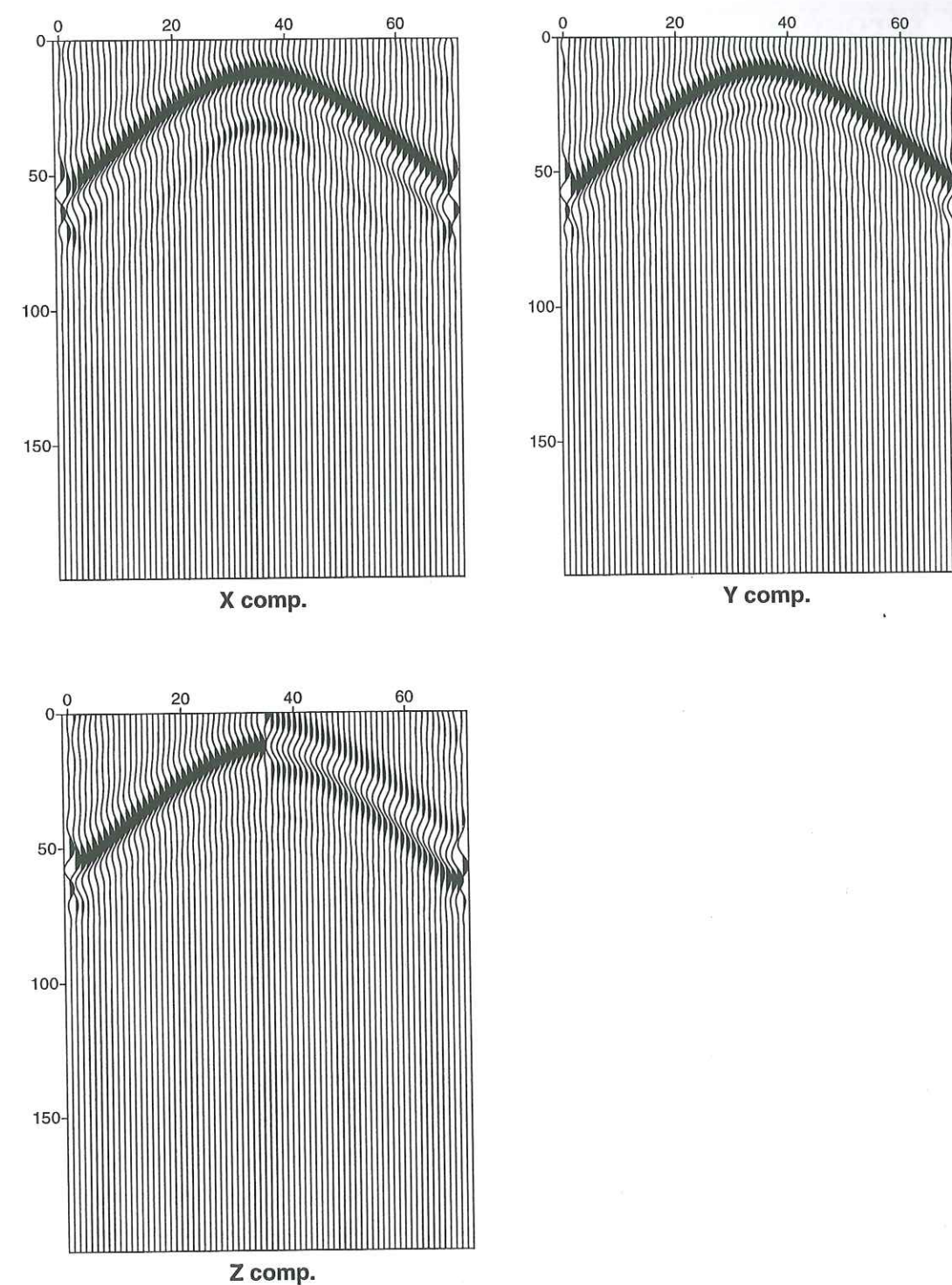


FIG. 4.8 – Même modèle que sur la Figure 4.7, mais en utilisant le schéma de différentiation classique du deuxième ordre.



## 4.6 Schéma aux différences finies pour un milieu hétérogène

La formulation du schéma d'ordre 2 optimisé ayant été donnée pour des milieux homogènes, nous considérons maintenant les milieux hétérogènes. L'équation 4.1, pour de tels milieux, fait apparaître des dérivées secondes du type:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (4.32)$$

L'évaluation de ces dérivées doit prendre en compte les variations des paramètres élastiques (représentés ici par le symbole  $\nu$ ).

Les calculs deviennent alors relativement lourds et fastidieux. Pour le détail des opérations, on se reportera à l'annexe 4.A, qui explicite toutes les étapes du calcul. Les expressions développées dans l'annexe n'ont pour l'instant pas encore été implémentées dans un code, mais leur utilisation ne doit pas poser de problème.

## 4.7 Perspectives: couplage avec les éléments de frontière

Nous exposons dans cette section les idées qui doivent permettre la réalisation du couplage des éléments de frontière avec la méthode de différences finies développée précédemment.

Un des principaux inconvénients des méthodes de différences finies est leur difficulté à prendre correctement en compte la surface libre et les interfaces entre deux milieux. En général, ces surfaces sont approximées géométriquement par un profil en marches d'escaliers, ce qui n'est pas réaliste et introduit des diffractions parasites. De plus l'écriture de la condition de contrainte nulle à la surface n'est pas toujours facile et peut conduire à des approximations non justifiées physiquement. Dans un schéma en déplacement notamment, l'évaluation de la contrainte nécessite à priori la connaissance du déplacement "au-dessus" de la surface, pour évaluer la dérivée spatiale, ce qui n'a aucun sens. En fait, les tests numériques réalisés par Moczo et al. (1997) montrent qu'il existe une formulation permettant de simuler une surface libre plane avec précision. Le problème reste entier dans le cas d'une topographie quelconque.

Pour permettre de réparer cet inconvénient des méthodes de différences finies, il est

proposé d'introduire des cellules superficielles ayant une forme se conformant à la topographie désirée. Une formulation par les équations intégrales permet de montrer que le déplacement en un point quelconque d'une cellule peut être obtenu à partir des seules valeurs des déplacements aux noeuds. Comme les équations intégrales ne nécessitent pas le calcul des dérivées spatiales, les points manquants en différences finies pour l'évaluation des dérivées spatiales (ceux situés au delà de la surface libre) ne sont pas nécessaires.

En partant de la représentation intégrale indirecte (équation 1.16 écrite en fréquence) appliquée à une maille effectuant le raccord entre la grille régulière des différences finies et la surface libre, on peut écrire le déplacement  $\mathbf{u}^k$  au noeud  $k$  de la maille comme combinaison linéaire des densités de force  $\Psi^n$  aux  $N_e$  noeuds de la maille:

$$\mathbf{u}^k = \sum_{n=1}^{N_e} \mathbf{G}^{kn} \Psi^n \quad (4.33)$$

Les tenseurs  $\mathbf{G}^{kn}$  sont obtenus par intégration des tenseurs de Green sur la frontière de la maille, pondérés par les fonctions d'interpolation spatiales.

De façon similaire, le déplacement  $\mathbf{u}^c$  en un point intérieur à la maille peut également s'écrire comme combinaison linéaire des  $\Psi^n$ . Le système linéaire formé par les  $N_e$  équations du type 4.33 écrites pour les  $N_e$  noeuds de la maille peut être inversé pour exprimer les densités de force  $(\Psi^n)_{n=1, N_e}$  en fonctions des déplacements  $(\mathbf{u}^k)_{k=1, N_e}$ . On aboutit finalement à la représentation suivante pour  $\mathbf{u}^c$ :

$$\mathbf{u}^c = \sum_{n=1}^{N_e} \mathbf{K}^{cn} \mathbf{u}^n \quad (4.34)$$

Les valeurs des déplacements aux  $N_l$  noeuds de la maille situés à la surface libre peuvent être obtenus sous la même forme, en ajoutant les  $N_l$  conditions de surface libre écrites en ces noeuds:

$$\mathbf{T}^k = \sum_{n=1}^{N_e} \Sigma^{kn} \Psi^n = 0 \quad (4.35)$$

La relation 4.34 est du même type que ce qu'utilisent Peng & Töksöz (1995) pour optimiser les coefficients de pondération du schéma aux bords du modèle, afin de déterminer des conditions absorbantes performantes pour des angles d'incidence donnés.

Les expressions analytiques des tenseurs  $\mathbf{G}^{kn}$  et  $\mathbf{K}^{cn}$  ne sont pas simple à écrire, mais on peut contourner le problème, en écrivant que l'équation 4.34 est vérifiée pour toute onde respectant la condition de surface libre. On connaît l'expression analytique du champ de déplacement dû à une onde plane à incidence quelconque réfléchi par une



surface libre plane. En exprimant le déplacement  $u^c$  en un point intérieur à la maille comme combinaison linéaire des valeurs du champ aux  $N_e$  noeuds de la maille, pour une variété suffisante d'azimuts et de nombres d'ondes horizontaux  $k_H$  distincts, on obtient un système linéaire surconditionné. Sa résolution (par la méthode des moindres carrés par exemple) permet d'obtenir les coefficients des tenseurs  $\mathbf{K}^{kn}$ , qui donnent la valeur du déplacement en un point donné, en fonction du champ de déplacement aux  $N_e$  noeuds de la maille.

Ces représentations doivent permettre, en effectuant un choix adapté des mailles à la surface libre, d'exprimer des conditions de surface libre qui soient plus justes.

*Remarque:* La représentation 4.34 doit être valide pour tout type d'onde, c'est à dire, en considérant une décomposition en ondes planes, que les ondes évanescentes ( $k_H > \omega/c$ ) doivent être considérées pour l'inversion aussi bien que les ondes homogènes ( $k_H \leq \omega/c$ ). Les valeurs prises par les nombres d'ondes horizontaux vont donc théoriquement de 0 à l'infini. En pratique, nous fixons une limite  $k_{max}$ , obtenue par l'expérience.

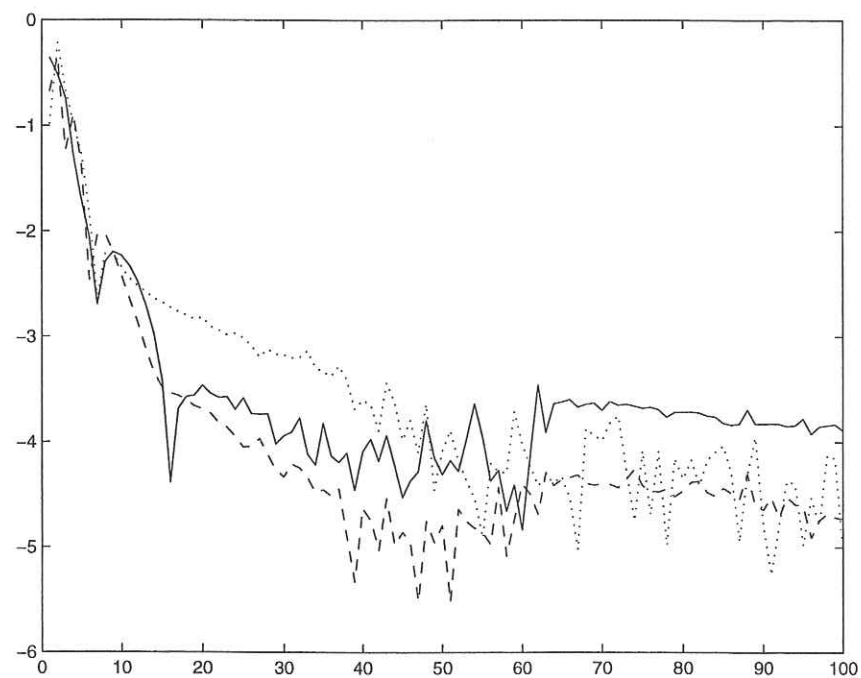


FIG. 4.9 – Précision obtenue, sur les 3 composantes  $x$ ,  $y$  et  $z$  du déplacement, en fonction du nombre de points par longueur d'onde de la discrétisation. Cas d'une onde plane incidente sur une surface libre.  $k_{max} = 3 \omega/\alpha$  et  $N_s = 2N_e$ .

Des tests ont été effectués sur une cellule cubique à 8 noeuds, pour déterminer le nombre  $N_s$  d'ondes planes incidentes et la valeur de  $k_{max}$  à considérer pour obtenir une bonne précision de l'évaluation de  $u^c$ . Pour obtenir un système bien conditionné, nous

devons considérer un nombre  $N_s$  de champs d'ondes distincts égale au nombre  $N_e$  d'inconnues. En pratique, nous utilisons un nombre  $N_s > N_e$ , de façon à mieux échantillonner les différentes ondes incidentes possibles, ce qui mène à un système sur-conditionné, qui peut être par une méthode de moindres carrés. Les azimuts des ondes planes incidentes sont choisis de manière uniforme dans  $[0, 2\pi]$ , et les nombres d'onde sont répartis linéairement entre les valeurs 0 et  $k_{max}$ .

Des résultats préliminaires (figure 4.9) montrent que, dans le cas d'une onde plane quelconque incidente sous une cellule cubique de côté  $h$ , une précision de l'ordre de 1% est obtenue avec une discrétisation à environ 10 points par longueur d'onde ( $\lambda = 10h$ ). On utilise un surconditionnement  $N_s = 2N_e$  et des nombres d'ondes répartis entre 0 et  $k_{max} = 3 \omega/\alpha$ .

Remarquons que l'emploi d'une cellule à 8 noeuds (cube déformé) suppose une surface libre gauche (car définie par 4 noeuds), pour laquelle nous ne connaissons pas analytiquement l'expression des ondes planes réfléchies. Nous serons donc amenés à considérer des cellules différentes, ayant par exemple une face triangulaire du côté de la surface libre.

## 4.8 Conclusion

Nous espérons, par ce couplage entre élément de frontières et différences finies, pouvoir résoudre les conditions de surface libre pour des topographies quelconques. Le type de maille optimal est encore à déterminer, et la question du raccord entre la surface libre et le maillage régulier des différences finies est la partie délicate du travail restant à accomplir.



## Annexe 4.A: Différences Finies dans un milieu hétérogène 3D

Dans cette partie, nous développons les schémas de différences finies "tournés", pour des milieux 3D hétérogènes. L'idée de départ est issue de l'article de Stekl & Pratt (1998), mais la considération d'une dimension supplémentaire et des hétérogénéités complique un peu les manipulations.

Les schémas classiques de différentiation (Moczo, 1998) s'obtiennent en utilisant les axes du maillage comme repère. Pour un milieu hétérogène, on utilise les opérateurs suivants:

$$D_{X^2}[\nu, \cdot] = \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \frac{\partial \cdot}{\partial x} \right) \simeq \frac{1}{h^2} \begin{array}{|ccc|} \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \nu^{-x/2} & -(\nu^{+x/2} + \nu^{-x/2}) & \nu^{+x/2} \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad (4.36)$$

$$D_{XY}[\nu, \cdot] = \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \frac{\partial \cdot}{\partial y} \right) \simeq \frac{1}{4h^2} \begin{array}{|ccc|} \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline \nu^{-x} & 0 & -\nu^{+x} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\nu^{-x} & 0 & \nu^{+x} \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad (4.37)$$

$$\text{et } D_{YX}[\nu, \cdot] = \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial \cdot}{\partial x} \right) \simeq \frac{1}{4h^2} \begin{array}{|ccc|} \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline \nu^{-y} & 0 & -\nu^{-y} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\nu^{+y} & 0 & \nu^{+y} \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad (4.38)$$

où l'on définit:

$$\begin{aligned} \nu^{\pm x/2} &= \frac{\nu_{m,n,p} + \nu_{m\pm 1,n,p}}{2} & \nu^{\pm x} &= \nu_{m\pm 1,n,p} \\ \nu^{\pm y/2} &= \frac{\nu_{m,n,p} + \nu_{m,n\pm 1,p}}{2} & \nu^{\pm y} &= \nu_{m,n\pm 1,p} \\ \nu^{\pm z/2} &= \frac{\nu_{m,n,p} + \nu_{m,n,p\pm 1}}{2} & \nu^{\pm z} &= \nu_{m,n,p\pm 1} \end{aligned} \quad (4.39)$$

L'équation 4.1 s'écrit, à l'aide des opérateurs ci-dessus, et sans tenir compte des densités volumiques de forces, sous la forme:

$$\begin{aligned} 0 &= \rho\omega^2 u + D_{X^2}[\lambda + 2\mu, u] + D_{Y^2}[\mu, u] + D_{Z^2}[\mu, u] \\ &\quad + (D_{XY}[\lambda, v] + D_{YX}[\mu, v]) + (D_{XZ}[\lambda, w] + D_{ZX}[\mu, w]) \\ 0 &= \rho\omega^2 v + D_{Y^2}[\lambda + 2\mu, v] + D_{X^2}[\mu, v] + D_{Z^2}[\mu, v] \\ &\quad + (D_{YX}[\lambda, u] + D_{XY}[\mu, u]) + (D_{YZ}[\lambda, w] + D_{ZY}[\mu, w]) \\ 0 &= \rho\omega^2 w + D_{Z^2}[\lambda + 2\mu, w] + D_{X^2}[\mu, w] + D_{Y^2}[\mu, w] \\ &\quad + (D_{ZX}[\lambda, u] + D_{XZ}[\mu, u]) + (D_{ZY}[\lambda, v] + D_{YZ}[\mu, v]) \end{aligned} \quad (4.40)$$

Considérons maintenant un référentiel tourné de 45° autour de Oz. Dans ce nouveau repère (de coordonnées x', y', z'), les déplacements sont notés u', v', w'. Nous obtenons alors les relations suivantes:

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(u' - v') \quad v = \frac{1}{\sqrt{2}}(u' + v') \quad w = w' \quad (4.41)$$

$$u' = \frac{1}{\sqrt{2}}(u + v) \quad v' = \frac{1}{\sqrt{2}}(v - u) \quad w' = w \quad (4.42)$$

On écrit les équations 4.1 dans le repère tourné (sans les termes sources  $f_i$ ) et on les note (a'), (b') et (c'). En les regroupant en  $\frac{(a')-(b')}{\sqrt{2}}$ ,  $\frac{(a')+(b')}{\sqrt{2}}$  et (c'), puis en utilisant les relations 4.42, nous obtenons:

$$\rho\omega^2 u + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x'} \left[ \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial v}{\partial x'} + \frac{\partial v}{\partial y'} - \frac{\partial u}{\partial y'} + \sqrt{2} \frac{\partial w}{\partial z'} \right) + 2\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial v}{\partial x'} \right) \right] \right]$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial}{\partial y'} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y'} + \frac{\partial v}{\partial y'} + \frac{\partial v}{\partial x'} - \frac{\partial u}{\partial x'} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z'} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z'} + \frac{\partial v}{\partial z'} + \sqrt{2} \frac{\partial w}{\partial x'} \right) \right] \\
& - \frac{\partial}{\partial y'} \left[ \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial v}{\partial x'} + \frac{\partial v}{\partial y'} - \frac{\partial u}{\partial y'} + \sqrt{2} \frac{\partial w}{\partial z'} \right) + 2\mu \left( \frac{\partial v}{\partial y'} - \frac{\partial u}{\partial y'} \right) \right] \\
& - \frac{\partial}{\partial x'} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x'} - \frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial y'} + \frac{\partial v}{\partial y'} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial z'} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z'} - \frac{\partial u}{\partial z'} + \sqrt{2} \frac{\partial w}{\partial y'} \right) \right] \Big] = 0 \\
\rho \omega^2 v & + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x'} \left[ \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial v}{\partial x'} + \frac{\partial v}{\partial y'} - \frac{\partial u}{\partial y'} + \sqrt{2} \frac{\partial w}{\partial z'} \right) + 2\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial v}{\partial x'} \right) \right] \right. \\
& + \frac{\partial}{\partial y'} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y'} + \frac{\partial v}{\partial y'} + \frac{\partial v}{\partial x'} - \frac{\partial u}{\partial x'} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z'} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z'} + \frac{\partial v}{\partial z'} + \sqrt{2} \frac{\partial w}{\partial x'} \right) \right] \\
& + \frac{\partial}{\partial y'} \left[ \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial v}{\partial x'} + \frac{\partial v}{\partial y'} - \frac{\partial u}{\partial y'} + \sqrt{2} \frac{\partial w}{\partial z'} \right) + 2\mu \left( \frac{\partial v}{\partial y'} - \frac{\partial u}{\partial y'} \right) \right] \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial x'} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x'} - \frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial y'} + \frac{\partial v}{\partial y'} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z'} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z'} - \frac{\partial u}{\partial z'} + \sqrt{2} \frac{\partial w}{\partial y'} \right) \right] \right] = 0 \\
\rho \omega^2 w & + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{\partial}{\partial z'} \left[ \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial v}{\partial x'} + \frac{\partial v}{\partial y'} - \frac{\partial u}{\partial y'} + \sqrt{2} \frac{\partial w}{\partial z'} \right) + 2\mu \sqrt{2} \frac{\partial w}{\partial z'} \right] \right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial x'} \left[ \mu \left( \sqrt{2} \frac{\partial w}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial z'} + \frac{\partial v}{\partial z'} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y'} \left[ \mu \left( \sqrt{2} \frac{\partial w}{\partial y'} + \frac{\partial v}{\partial z'} - \frac{\partial u}{\partial z'} \right) \right] \right] = 0
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Ces expressions peuvent ensuite être réorganisées de manière à les faire apparaître sous une forme proche de 4.40:

$$\begin{aligned}
0 &= \rho \omega^2 u + \Delta_{X^2}[\lambda + 2\mu, u] + \Delta_{Y^2}[\mu, u] + D'_{Z^2}[\mu, u] \\
&\quad + (\Delta_{XY}[\lambda, v] + \Delta_{YX}[\mu, v]) + (\Delta_{XZ}[\lambda, w] + \Delta_{ZX}[\mu, w]) \\
0 &= \rho \omega^2 v + \Delta_{Y^2}[\lambda + 2\mu, v] + \Delta_{X^2}[\mu, v] + D'_{Z^2}[\mu, v] \\
&\quad + (\Delta_{YX}[\lambda, u] + \Delta_{XY}[\mu, u]) + (\Delta_{YZ}[\lambda, w] + \Delta_{ZY}[\mu, w]) \\
0 &= \rho \omega^2 w + D'_{Z^2}[\lambda + 2\mu, w] + D'_{X^2}[\mu, w] + D'_{Y^2}[\mu, w] \\
&\quad + (\Delta_{ZX}[\lambda, u] + \Delta_{XZ}[\mu, u]) + (\Delta_{ZY}[\lambda, v] + \Delta_{YZ}[\mu, v])
\end{aligned} \tag{4.44}$$

où nous utilisons les notations suivantes:

$$\begin{aligned}
D'_{X^2}[\nu, u] &= \frac{\partial}{\partial x'} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial x'} \right) & D'_{Y^2}[\nu, u] &= \frac{\partial}{\partial y'} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial y'} \right) & \dots \\
D'_{XY}[\nu, u] &= \frac{\partial}{\partial x'} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial y'} \right) & D'_{YX}[\nu, u] &= \frac{\partial}{\partial y'} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial x'} \right) & \dots \\
\Delta_{X^2}[\nu, u] &= \frac{1}{2} [D'_{X^2}[\nu, u] + D'_{Y^2}[\nu, u]] - \frac{1}{2} [D'_{XY}[\nu, u] + D'_{YX}[\nu, u]] \\
\Delta_{Y^2}[\nu, u] &= \frac{1}{2} [D'_{X^2}[\nu, u] + D'_{Y^2}[\nu, u]] + \frac{1}{2} [D'_{XY}[\nu, u] + D'_{YX}[\nu, u]]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{XY}[\nu, v] &= \frac{1}{2} [D'_{X^2}[\nu, u] - D'_{Y^2}[\nu, u]] + \frac{1}{2} [D'_{XY}[\nu, u] - D'_{YX}[\nu, u]] \\
\Delta_{YX}[\nu, v] &= \frac{1}{2} [D'_{X^2}[\nu, u] - D'_{Y^2}[\nu, u]] - \frac{1}{2} [D'_{XY}[\nu, u] - D'_{YX}[\nu, u]] \\
\Delta_{XZ}[\nu, w] &= \frac{1}{\sqrt{2}} [D'_{XZ}[\nu, u] - D'_{YZ}[\nu, u]] \\
\Delta_{YZ}[\nu, w] &= \frac{1}{\sqrt{2}} [D'_{XZ}[\nu, u] + D'_{YZ}[\nu, u]] \\
\Delta_{ZX}[\nu, w] &= \frac{1}{\sqrt{2}} [D'_{ZX}[\nu, u] - D'_{ZY}[\nu, u]] \\
\Delta_{ZY}[\nu, w] &= \frac{1}{\sqrt{2}} [D'_{ZX}[\nu, u] + D'_{ZY}[\nu, u]]
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Chaque dérivée partielle d'ordre 2 est obtenue à l'aide des schémas classiques, appliqués à une grille "tournée", et s'écrit comme suit:

$$D'_{X^2}[\nu, \cdot] \simeq \frac{1}{2h^2} \begin{array}{|c|c|c|} \hline O & & \\ \hline \nu_{-y/2}^{-x/2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\nu_{+y/2}^{+x/2} - \nu_{-y/2}^{-x/2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \nu_{+y/2}^{+x/2} \\ \hline O & & \\ \hline \end{array} \quad D'_{Z^2}[\nu, \cdot] \simeq \frac{1}{h^2} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \nu^{-z/2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\nu^{+z/2} - \nu^{-z/2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \nu^{+z/2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \tag{4.46}$$

$$D'_{YX}[\nu, \cdot] \simeq \frac{1}{2h^2} \begin{array}{|c|c|c|} \hline O & & \\ \hline 0 & \nu_{-y/2}^{+x/2} & 0 \\ \hline -\nu_{+y/2}^{-x/2} & 0 & -\nu_{-y/2}^{+x/2} \\ \hline 0 & \nu_{+y/2}^{-x/2} & 0 \\ \hline O & & \\ \hline \end{array} \quad D'_{XY}[\nu, \cdot] \simeq \frac{1}{2h^2} \begin{array}{|c|c|c|} \hline O & & \\ \hline 0 & \nu_{-y/2}^{-x/2} & 0 \\ \hline -\nu_{-y/2}^{-x/2} & 0 & -\nu_{+y/2}^{+x/2} \\ \hline 0 & \nu_{+y/2}^{+x/2} & 0 \\ \hline O & & \\ \hline \end{array} \tag{4.47}$$



$$D'_{XZ}[\nu, \cdot] \simeq \frac{1}{4\sqrt{2}h^2} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \nu_{-y}^{-x} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\nu_{+y}^{+x} \\ \hline O & & \\ \hline -\nu_{-y}^{-x} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \nu_{+y}^{+x} \\ \hline \end{array} \quad D'_{ZX}[\nu, \cdot] \simeq \frac{1}{4\sqrt{2}h^2} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \nu^{-z} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\nu^{-z} \\ \hline O & & \\ \hline -\nu^{+z} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \nu^{+z} \\ \hline \end{array} \quad (4.48)$$

avec

$$\begin{aligned} \nu_{+y/2}^{+x/2} &= \frac{\nu_{m,n,p} + \nu_{m+1,n,p} + \nu_{m,n+1,p} + \nu_{m+1,n+1,p}}{4} \\ \nu_{+y}^{+x} &= \nu_{m+1,n+1,p} \\ \dots &\dots \end{aligned} \quad (4.49)$$

Cela nous permet d'évaluer les opérateurs de 4.45:

$$\Delta_{X^2}[\nu, \cdot] \simeq \frac{1}{4h^2} \begin{array}{|c|c|c|} \hline O & & \\ \hline \nu_{-y/2}^{-x/2} & -\nu_{-y/2}^{-x/2} - \nu_{-y/2}^{+x/2} & \nu_{-y/2}^{+x/2} \\ \hline \nu_{-y/2}^{-x/2} + \nu_{+y/2}^{-x/2} & -\nu_{+y/2}^{+x/2} - \nu_{-y/2}^{-x/2} - \nu_{-y/2}^{+x/2} - \nu_{+y/2}^{-x/2} & \nu_{-y/2}^{+x/2} + \nu_{+y/2}^{+x/2} \\ \hline \nu_{+y/2}^{-x/2} & -\nu_{+y/2}^{-x/2} - \nu_{+y/2}^{+x/2} & \nu_{+y/2}^{+x/2} \\ \hline O & & \\ \hline \end{array} \quad (4.50)$$

$$\Delta_{Y^2}[\nu, \cdot] \simeq \frac{1}{4h^2} \begin{array}{|c|c|c|} \hline O & & \\ \hline \nu_{-y/2}^{-x/2} & \nu_{-y/2}^{-x/2} + \nu_{-y/2}^{+x/2} & \nu_{-y/2}^{+x/2} \\ \hline -\nu_{-y/2}^{-x/2} - \nu_{+y/2}^{-x/2} & -\nu_{+y/2}^{+x/2} - \nu_{-y/2}^{-x/2} - \nu_{-y/2}^{+x/2} - \nu_{+y/2}^{-x/2} & -\nu_{-y/2}^{+x/2} - \nu_{+y/2}^{+x/2} \\ \hline \nu_{+y/2}^{-x/2} & \nu_{+y/2}^{-x/2} + \nu_{+y/2}^{+x/2} & \nu_{+y/2}^{+x/2} \\ \hline O & & \\ \hline \end{array} \quad (4.51)$$

$$\Delta_{XY}^\epsilon[\nu, \cdot] \simeq \frac{1}{4h^2} \begin{array}{|c|c|c|} \hline O & & \\ \hline \nu_{-y/2}^{-x/2} & \epsilon(\nu_{-y/2}^{-x/2} - \nu_{-y/2}^{+x/2}) & -\nu_{-y/2}^{+x/2} \\ \hline \epsilon(-\nu_{-y/2}^{-x/2} + \nu_{+y/2}^{-x/2}) & -\nu_{+y/2}^{+x/2} - \nu_{-y/2}^{-x/2} + \nu_{-y/2}^{+x/2} + \nu_{+y/2}^{-x/2} & \epsilon(\nu_{-y/2}^{+x/2} - \nu_{+y/2}^{+x/2}) \\ \hline -\nu_{+y/2}^{-x/2} & \epsilon(-\nu_{+y/2}^{-x/2} + \nu_{+y/2}^{+x/2}) & \nu_{+y/2}^{+x/2} \\ \hline O & & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} \epsilon = 1 &\rightarrow \Delta_{XY}^\epsilon[\nu, \cdot] = \Delta_{XY}[\nu, \cdot] \\ \epsilon = -1 &\rightarrow \Delta_{XY}^\epsilon[\nu, \cdot] = \Delta_{YX}[\nu, \cdot] \end{aligned} \quad (4.52)$$



$$\Delta_{xZ}^\epsilon[\nu, \cdot] \simeq \frac{1}{8h^2} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \nu_{-y}^{-x} & 0 & \epsilon \nu_{-y}^{+x} \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline -\epsilon \nu_{+y}^{-x} & 0 & -\nu_{+y}^{+x} \\ \hline O & & \\ \hline -\nu_{-y}^{-x} & 0 & -\epsilon \nu_{-y}^{+x} \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \epsilon \nu_{+y}^{-x} & 0 & \nu_{+y}^{+x} \\ \hline \end{array} \quad \Delta_{Zx}^\epsilon[\nu, \cdot] \simeq \frac{1}{8h^2} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \nu^{-z} & 0 & \epsilon \nu^{-z} \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline -\epsilon \nu^{-z} & 0 & -\nu^{-z} \\ \hline O & & \\ \hline -\nu^{+z} & 0 & -\epsilon \nu^{+z} \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \epsilon \nu^{+z} & 0 & \nu^{+z} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} \epsilon = 1 &\rightarrow \Delta_{xZ}^\epsilon[\nu, \cdot] = \Delta_{YZ}[\nu, \cdot] \\ \epsilon = -1 &\rightarrow \Delta_{xZ}^\epsilon[\nu, \cdot] = \Delta_{XZ}[\nu, \cdot] \end{aligned} \quad \begin{aligned} \epsilon = 1 &\rightarrow \Delta_{Zx}^\epsilon[\nu, \cdot] = \Delta_{ZY}[\nu, \cdot] \\ \epsilon = -1 &\rightarrow \Delta_{Zx}^\epsilon[\nu, \cdot] = \Delta_{ZX}[\nu, \cdot] \end{aligned} \quad (4.53)$$

Les résultats ci-dessus valent pour une rotation des axes du système autour de  $Oz$  (repère noté  $(z)$ ). La même chose peut être réalisée pour les 2 autres systèmes tournés:  $(x)$  et  $(y)$ . Dans ces repères, tous les opérateurs définis ci-dessus sont formellement les mêmes: l'étoile est la même, mais elle doit subir une rotation pour amener ses axes  $X, Y, Z$  en correspondance avec  $Y, Z, X$  pour le repère  $(x)$ , et avec  $Z, X, Y$  pour le repère  $(y)$ . Les indices des coefficients  $\nu$  doivent donc également subir la permutation correspondante:  $(x, y, z) \rightarrow (y, z, x)$  pour le repère  $(x)$ , et  $(x, y, z) \rightarrow (z, x, y)$  pour le repère  $(y)$ .

L'opérateur lié à chaque couple  $[\nu, u]$  peut être moyenné sur les trois repères considérés, ce qui permet, en fin de compte, d'obtenir un jeu d'équations symétriques par rapport aux trois axes pour l'équation de l'élastodynamique discrétisée.

Nous obtenons les opérateurs suivants:

$$T_{X^2}[\nu, \cdot] = \frac{\Delta_{X^2}[\nu, \cdot]^{(z)} + \Delta_{Y^2}[\nu, \cdot]^{(y)} + D'_{Z^2}[\nu, \cdot]^{(x)}}{3}$$

$$= \frac{1}{12h^2} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \nu_{-z/2}^{-x/2} & -\nu_{-z/2}^{-x/2} - \nu_{-z/2}^{+x/2} & \nu_{-z/2}^{+x/2} \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \nu_{-y/2}^{-x/2} & -\nu_{-y/2}^{-x/2} - \nu_{-y/2}^{+x/2} & \nu_{-y/2}^{+x/2} \\ \hline \nu_{-y/2}^{-x/2} + \nu_{+y/2}^{-x/2} & -\nu_{+y/2}^{+x/2} - \nu_{-y/2}^{-x/2} - \nu_{-y/2}^{+x/2} - \nu_{+y/2}^{-x/2} & \nu_{-y/2}^{+x/2} + \nu_{+y/2}^{+x/2} \\ \hline \nu_{-z/2}^{-x/2} + \nu_{+z/2}^{-x/2} & -\nu_{+z/2}^{+x/2} - \nu_{-z/2}^{-x/2} - \nu_{-z/2}^{+x/2} - \nu_{+z/2}^{-x/2} & \nu_{-z/2}^{+x/2} + \nu_{+z/2}^{+x/2} \\ \hline +4\nu_{-x/2}^{-x/2} & -4(\nu_{-x/2}^{-x/2} + \nu_{+x/2}^{+x/2}) & +4\nu_{+x/2}^{+x/2} \\ \hline \nu_{+y/2}^{-x/2} & -\nu_{+y/2}^{-x/2} - \nu_{+y/2}^{+x/2} & \nu_{+y/2}^{+x/2} \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \nu_{+z/2}^{-x/2} & -\nu_{+z/2}^{-x/2} - \nu_{+z/2}^{+x/2} & \nu_{+z/2}^{+x/2} \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \quad (4.54)$$

$$S_{Y^2+Z^2}[\nu, \cdot] = \frac{\Delta_{Y^2}[\nu, \cdot]^{(z)} + D'_{Z^2}[\nu, \cdot]^{(z)} + \Delta_{X^2}[\nu, \cdot]^{(y)} + D'_{Z^2}[\nu, \cdot]^{(y)} + D'_{X^2}[\nu, \cdot]^{(x)} + D'_{Y^2}[\nu, \cdot]^{(x)}}{3}$$

$$= \frac{1}{12h^2} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 2\nu_{-y/2}^{-z/2} & 0 \\ \hline \nu_{-x/2}^{-z/2} & \nu_{-x/2}^{-z/2} + \nu_{+x/2}^{-z/2} + 4\nu_{-z/2}^{-z/2} & \nu_{+x/2}^{-z/2} \\ \hline 0 & 2\nu_{+y/2}^{-z/2} & 0 \\ \hline \nu_{-y/2}^{-x/2} & \nu_{-y/2}^{-x/2} + \nu_{-y/2}^{+x/2} + 4\nu_{-y/2}^{-y/2} & \nu_{-y/2}^{+x/2} \\ \hline -\nu_{-x/2}^{-z/2} - \nu_{-x/2}^{+z/2} & -\nu_{+x/2}^{+z/2} - \nu_{-x/2}^{-z/2} - \nu_{-x/2}^{+z/2} - \nu_{+x/2}^{-z/2} & -\nu_{+x/2}^{-z/2} - \nu_{+x/2}^{+z/2} \\ \hline -\nu_{-y/2}^{-x/2} - \nu_{+y/2}^{-x/2} & -\nu_{+y/2}^{+x/2} - \nu_{-y/2}^{-x/2} - \nu_{-y/2}^{+x/2} - \nu_{+y/2}^{-x/2} & -\nu_{-y/2}^{+x/2} - \nu_{+y/2}^{+x/2} \\ \hline & -4(\nu_{-z/2}^{-z/2} + \nu_{+z/2}^{+z/2} + \nu_{-y/2}^{-y/2} + \nu_{+y/2}^{-y/2}) & \\ \hline & -2(\nu_{+y/2}^{+z/2} + \nu_{-y/2}^{+z/2} + \nu_{+y/2}^{-z/2} + \nu_{-y/2}^{-z/2}) & \\ \hline \nu_{+y/2}^{-x/2} & \nu_{+y/2}^{-x/2} + \nu_{+y/2}^{+x/2} + 4\nu_{+y/2}^{-y/2} & \nu_{+y/2}^{+x/2} \\ \hline 0 & 2\nu_{-y/2}^{+z/2} & 0 \\ \hline \nu_{-x/2}^{+z/2} & \nu_{-x/2}^{+z/2} + \nu_{+x/2}^{+z/2} + 4\nu_{-z/2}^{+z/2} & \nu_{+x/2}^{+z/2} \\ \hline 0 & 2\nu_{+y/2}^{+z/2} & 0 \end{array} \quad (4.55)$$



Les définitions de  $T_{Y^2}[\nu, \cdot]$ ,  $T_{Z^2}[\nu, \cdot]$ ,  $S_{X^2+Y^2}[\nu, \cdot]$  et  $S_{Z^2+X^2}[\nu, \cdot]$  sont exactement de la même forme (à une rotation et une permutation des indices près...).

On définit également:

$$T_{XY}[\nu, \cdot] = \frac{\Delta_{XY}[\nu, \cdot]^{(z)} + \Delta_{YZ}[\nu, \cdot]^{(y)} + \Delta_{ZX}[\nu, \cdot]^{(x)}}{3}$$

$$= \frac{1}{12h^2} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{1}{2}(\nu_{-x}^{-z} + \nu^{-x}) & 0 & -\frac{1}{2}(\nu_{+x}^{-z} + \nu^{+x}) \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{2}(\nu_{-x}^{-z} + \nu^{-x}) & 0 & \frac{1}{2}(\nu_{+x}^{-z} + \nu^{+x}) \\ \hline \nu_{-y/2}^{-x/2} & \nu_{-y/2}^{-x/2} - \nu_{-y/2}^{+x/2} & -\nu_{-y/2}^{+x/2} \\ \hline -\nu_{-y/2}^{-x/2} + \nu_{+y/2}^{-x/2} & -\nu_{+y/2}^{+x/2} - \nu_{-y/2}^{-x/2} + \nu_{-y/2}^{+x/2} + \nu_{+y/2}^{-x/2} & \nu_{-y/2}^{+x/2} - \nu_{+y/2}^{+x/2} \\ \hline -\nu_{+y/2}^{-x/2} & -\nu_{+y/2}^{-x/2} + \nu_{+y/2}^{+x/2} & \nu_{+y/2}^{+x/2} \\ \hline \frac{1}{2}(\nu_{-x}^{+z} + \nu^{-x}) & 0 & -\frac{1}{2}(\nu_{+x}^{+z} + \nu^{+x}) \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{2}(\nu_{-x}^{+z} + \nu^{-x}) & 0 & \frac{1}{2}(\nu_{+x}^{+z} + \nu^{+x}) \\ \hline \end{array} \quad (4.56)$$

et

$$T_{YX}[\nu, \cdot] = \frac{\Delta_{YX}[\nu, \cdot]^{(z)} + \Delta_{ZY}[\nu, \cdot]^{(y)} + \Delta_{XZ}[\nu, \cdot]^{(x)}}{3}$$

$$= \frac{1}{12h^2} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{1}{2}(\nu_{-y}^{-z} + \nu^{-y}) & 0 & -\frac{1}{2}(\nu_{+y}^{-z} + \nu^{-y}) \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{2}(\nu_{+y}^{-z} + \nu^{-y}) & 0 & \frac{1}{2}(\nu_{+y}^{-z} + \nu^{-y}) \\ \hline \nu_{-y/2}^{-x/2} & -(\nu_{-y/2}^{-x/2} - \nu_{-y/2}^{+x/2}) & -\nu_{-y/2}^{+x/2} \\ \hline -(\nu_{-y/2}^{-x/2} + \nu_{+y/2}^{-x/2}) & -\nu_{+y/2}^{+x/2} - \nu_{-y/2}^{-x/2} + \nu_{-y/2}^{+x/2} + \nu_{+y/2}^{-x/2} & -(\nu_{-y/2}^{+x/2} - \nu_{+y/2}^{+x/2}) \\ \hline -\nu_{+y/2}^{-x/2} & -(\nu_{+y/2}^{-x/2} + \nu_{+y/2}^{+x/2}) & \nu_{+y/2}^{+x/2} \\ \hline \frac{1}{2}(\nu_{-y}^{+z} + \nu^{-y}) & 0 & -\frac{1}{2}(\nu_{+y}^{+z} + \nu^{-y}) \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{2}(\nu_{+y}^{+z} + \nu^{-y}) & 0 & \frac{1}{2}(\nu_{+y}^{+z} + \nu^{-y}) \\ \hline \end{array} \quad (4.57)$$

Ces nouveaux opérateurs permettent de revenir à une forme complètement symétrique pour l'équation de l'élastodynamique:

$$\begin{aligned} 0 &= \rho\omega^2 u + T_{X^2}[\lambda + 2\mu, u] + S_{Y^2+Z^2}[\mu, u] \\ &\quad + (T_{XY}[\lambda, v] + T_{YX}[\mu, v]) + (T_{XZ}[\lambda, w] + T_{ZX}[\mu, w]) \\ 0 &= \rho\omega^2 v + T_{Y^2}[\lambda + 2\mu, v] + S_{X^2+Z^2}[\mu, v] \\ &\quad + (T_{YX}[\lambda, u] + T_{XY}[\mu, u]) + (T_{YZ}[\lambda, w] + T_{ZY}[\mu, w]) \\ 0 &= \rho\omega^2 w + T_{Z^2}[\lambda + 2\mu, w] + S_{X^2+Y^2}[\mu, w] \\ &\quad + (T_{ZX}[\lambda, u] + T_{XZ}[\mu, u]) + (T_{ZY}[\lambda, v] + T_{YZ}[\mu, v]) \end{aligned} \quad (4.58)$$

*Remarque 1:* en faisant  $\nu_{\pm j}^{\pm i} = \nu$ , pour tous les opérateurs, on retrouve bien les opérateurs obtenus dans le cas homogène.

*Remarque 2:* l'opérateur  $S$  correspond au regroupement de deux termes de l'équation 4.40.

Nous pouvons maintenant, comme dans le cas homogène, effectuer la correspondance entre les opérateurs classiques et les opérateurs "tournés". Les équivalences obtenues sont les suivantes:

$$\begin{aligned} D_{X^2}[\lambda + 2\mu, u] &\Leftrightarrow T_{X^2}[\lambda + 2\mu, u] \\ D_{Y^2}[\mu, u] + D_{Z^2}[\mu, u] &\Leftrightarrow S_{Y^2+Z^2}[\mu, u] \\ D_{XY}[\lambda, v] &\Leftrightarrow T_{XY}[\lambda, v] \\ D_{YX}[\mu, v] &\Leftrightarrow T_{YX}[\mu, v] \end{aligned} \quad (4.59)$$



### Annexe 4.B: Schéma de Différences Finies en déplacement à l'ordre 4

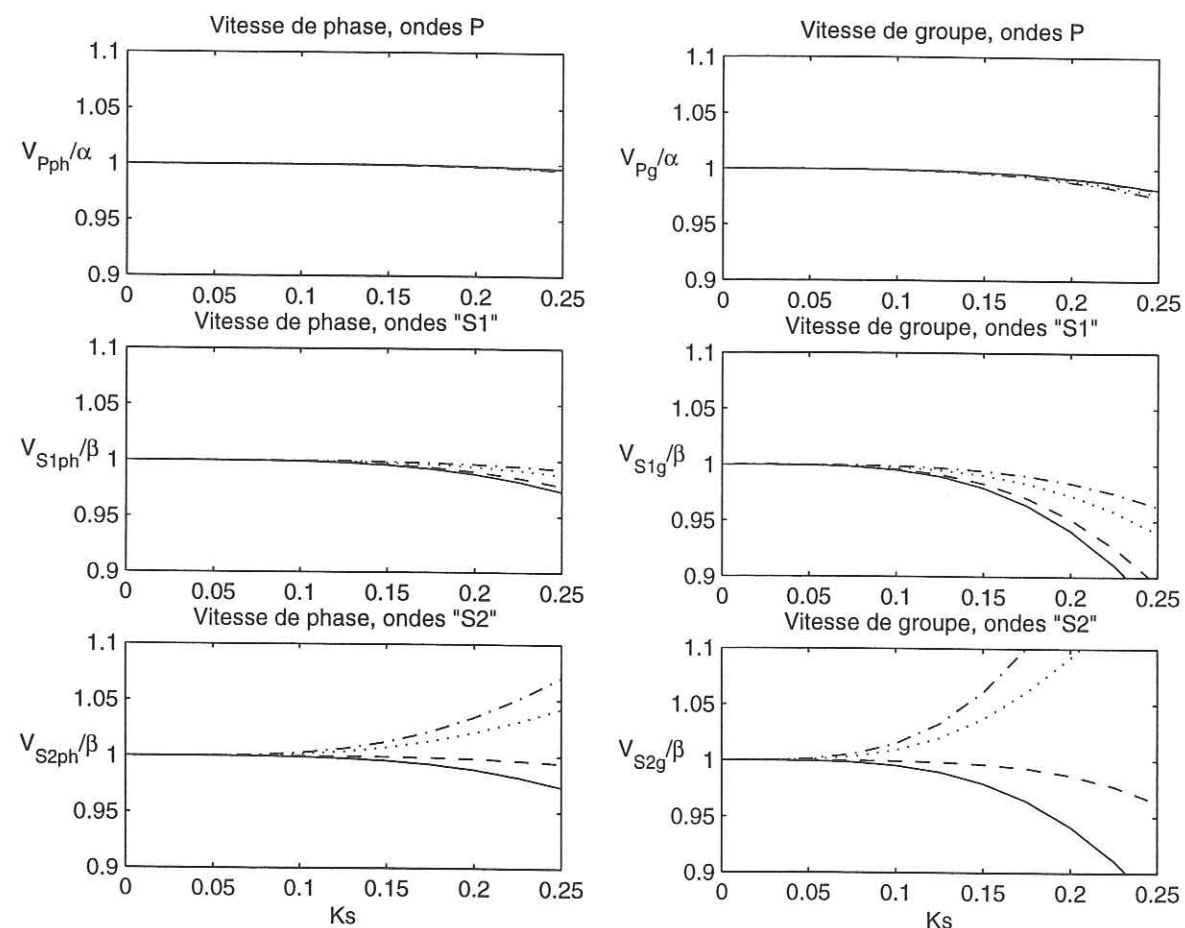


FIG. 4.10 – Courbes de dispersion obtenues pour un schéma 3D d'ordre 4 "classique". Sur chaque graphique, sont représentées quatre courbes correspondant aux différentes valeurs de l'inclinaison  $\theta$  de l'onde incidente par rapport à l'axe  $Oz$ :  $\theta = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ . L'azimut  $\phi$  est fixé à  $0^\circ$ . En abscisse, le nombre d'onde normalisé  $K_s$  des ondes  $S$ .

Le schéma d'ordre 4 est obtenu grâce aux expressions suivantes, déduites des développements de Taylor:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{12h^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 16 & -30 & 16 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{U} + \frac{h^4}{90} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \dots \quad (4.60)$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{48h^2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 16 & 0 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 0 & 16 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{U} + \frac{h^4}{30} \left( \frac{\partial^6 u}{\partial x^5 \partial y} + \frac{10}{3} \frac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y^3} + \frac{\partial^6 u}{\partial x \partial y^5} \right) + \dots \quad (4.61)$$

Les grilles utilisées sont les extensions naturelles de celles définies pour les schémas d'ordre 2, le noeud central correspondant au point d'évaluation de la dérivée. Seuls les coefficients des noeuds situés dans le plan  $(Ox, Oy)$  sont donnés ici, tous les autres étant nuls.

On peut observer que l'étoile utilisée pour ce schéma comporte 37 noeuds.

Les courbes de dispersions correspondantes sont données sur la Figure 4.10. Ce schéma donne des résultats comparables à ceux obtenus avec le schéma d'ordre 2 optimisé par "rotation-condensation", mais utilise une étoile comportant plus de noeuds et entraîne une plus grande largeur de bande de la matrice de rigidité.

Le schéma obtenu par optimisation globale donne de meilleurs résultats, mais utilise presque deux fois plus de noeuds (64 contre 37). Il a par contre, de par sa dissymétrie, une largeur de bande intermédiaire: de l'ordre de  $3N^2$ .



## Conclusion générale

Ce travail de thèse a porté sur la modélisation numérique de la propagation des ondes sismiques: nous avons étudié la diffraction des ondes large bande par des topographies tridimensionnelles. La partie centrale de cette étude réside dans le développement d'une méthode d'éléments de frontière en temps, basée sur une formulation directe des équations de représentation. Grâce à l'utilisation d'un schéma explicite de résolution des conditions aux limites, nous pouvons effectuer la modélisation de structures à topographies 3D avec des moyens de calculs limités, car la quantité de mémoire vive requise reste faible. Nous obtenons des résultats ayant une excellente précision en utilisant une discrétisation à quatre points par longueur d'onde minimum. Le principal inconvénient de la méthode est l'augmentation du temps de calcul proportionnellement à  $N^4$ ,  $N$  étant le nombre de noeuds du maillage dans une direction. Cela restreint le champ des applications possible de la méthode, car la taille des modèles calculables en un temps raisonnable est bien sûr limitée.

L'absence d'expressions analytiques pour les fonctions de Green de milieux hétérogènes nous contraint à ne considérer, dans les méthodes d'éléments de frontière, que des milieux homogènes. Dans le but d'étendre le domaine de validité de notre méthode, nous avons testé des expressions approchées des fonctions de Green dans les milieux à gradient de vitesse constant, proposées par F. Sánchez-Sesma. Ces formules ne sont valides que pour des gradients de vitesse très faibles, et ne permettent pas la modélisation de signaux à grandes longueurs d'ondes pour des gradients réalistes.

Enfin, un schéma de différences finies d'ordre 2 optimisé a été déterminé. Notre objectif était de réaliser le couplage d'une méthode de différence finies 3D écrite en fréquence avec une méthode d'éléments de frontière pour permettre de traiter des modèles de taille plus importante, tout en conservant la précision des éléments de frontière pour la résolution des conditions de surface libre.

Cette dernière partie de mon travail ne constitue qu'une étude préliminaire au développement d'une méthode hybride Eléments de Frontière/Différences Finies en fréquence.



## Références Bibliographiques

- Abramovitz M. & I.A. Stegun (1972) Handbook of Mathematical Functions, *Dover*, New-York
- Aki K. & K.L. Larner (1970) Surface motion of a layered medium having an irregular interface due to incident plane SH wave, *J. Geophys. Res.*, **75**, 933-954
- Aki K. & P.G. Richards (1980) Quantitative seismology: theory and methods, *W.H. Freeman and Co.*, San Francisco, CA.
- Ahmad S. & P.K. Banerjee (1988) Time-domain transient elastodynamic analysis of 3-D solids by BEM, *Int. J. Num. Meth. in Engineering*, **26**, 1709-1728
- Alverson R.C., F.C. Gair & J.F. Hook (1963) Uncoupled equations of motion in nonhomogeneous elastic media, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **53**, 1023-1030
- Banerjee P.K., S. Ahmad & G.D. Manolis (1986) Transient elastodynamic analysis of three-dimensional problems by Boundary Element Methods, *Earthquake eng. struct. dyn.*, **14**, 933-949
- Ben-Menahem A. & W. B. Beydoun (1985) Range of validity of seismic ray and beam methods in general inhomogeneous media - I. General theory, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **82**, 207-234
- Beydoun W. B. & A. Ben-Menahem (1985) Range of validity of seismic ray and beam methods in general inhomogeneous media - II. A canonical problem, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **82**, 235-262
- Bielak J., O. Ghattas & H. Bao (1998) Ground motion modeling using 3D finite elements methods, *The Effects of Surface Geology on Seismic Motion*, Irikura, Kudo, Okada & Sasatani (eds), Balkema, Rotterdam, 121-133
- Bonnet M. (1995) Equations intégrales et éléments de frontière, *CNRS editions / Eyrolles*, Paris



- Bouchon M. & J.S. Barker (1996) Seismic response of a hill: the example of Tarzana, California, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **86**, 66-72
- Bouchon M. & O. Coutant (1994) Calculation of synthetic seismograms in a laterally varying medium by the Boundary Element-Discrete Wavenumber Method, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **84**, 1869-1881
- Bouchon M., C.A. Schultz & M.N. Toksöz (1995) A fast implementation of Boundary Integral Equation Methods to calculate the propagation of seismic waves in laterally varying layered media, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **85**, 1679-1687
- Bouchon M., C.A. Schultz & M.N. Toksöz (1996) Effect of 3-D topography on seismic motion, *J. Geophys. Res.*, **101**, 5835-3846
- Cayol V. & F.H. Cornet (1997) 3D mixed Boundary Elements for elastostatic deformation field analysis, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, **34**, 275-287
- Cerjan C., D. Kosloff, R. Kosloff & M. Reshef (1985) A nonreflecting boundary condition for discrete acoustic and elastic wave equations, *Geophysics*, **50**, 705-708
- Chouet B., G. Saccorotti, M. Martini, P. Dawson, G. de Luca, G. Milana & R. Scarpa (1997) Source and path effects in the wave fields of tremor and explosion at Stromboli Volcano, Italy, *J. Geophys. Res.*, **102**, 15129-15150
- Chouet B., G. de Luca, G. Milana, P. Dawson, M. Martini & R. Scarpa (1998) Shallow velocity structure of Stromboli volcano, Italy, derived from small-aperture array measurements of strombolian tremor, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **88**, 653-666
- Chouet B., G. Saccorotti, P. Dawson, M. Martini, R. Scarpa, G. de Luca, G. Milana & M. Cattaneo (1999) Broadband measurements of the sources of explosions at Stromboli Volcano, Italy, *Geophys. Res. Lett.*, **26**, 1937-1940
- Clayton R. & B. Engquist (1977) Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **67**, 1529-1540
- Coda H.B. & W.S. Venturini (1996) A simple comparison between two 3D time domain elastodynamic boundary element formulations, *Engng Anal. Boundary Elements*, **17**, 33-44
- Cole D.M., D.D. Kosloff & J.B. Minster (1978) A numerical Boundary Integral Equation Method for elastodynamics, I., *Bull. Seism. Soc. Am.*, **68**, 1331-1357
- Cole J.B. (1994) A nearly exact second-order finite-difference time-domain wave propagation algorithm on a coarse grid, *Computers in Phys.*, **8**, 730-734

- Collino F. & Tsogka C. (1998) Application of the PML absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media, *Rapport de Recherche n° 3471, INRIA, Août 1998*
- Coutant O. (1989) Numerical study of the diffraction of elastic waves by fluid-filled cracks, *J. Geophys. Res.*, **94**, 17805-17818
- Durand S., S. Gaffet & J. Virieux (1999) Seismic diffracted waves from topography using 3-D discrete wavenumber-boundary integral equation simulation, *Geophysics*, **64**, 572-578
- ESG 1998, Second International Symposium on The Effect of Surface Geology on Seismic Motion, *Special Volume on Simultaneous Simulation for Kobe*
- Faccioli E., F. Maggio, A. Quarteroni & A. Tagliani (1996) Spectral-domain decomposition methods for the solution of acoustic and elastic wave equations, *Geophysics*, **61**, 1160-1174
- Faccioli E., F. Maggio, R. Paolucci & A. Quarteroni (1997) 2D and 3D elastic wave propagation by a pseudo-spectral domain decomposition method, *J. Seismology*, **1**, 237-251
- Ferrazzini V., K. Aki & B. Chouet (1991) Characteristics of seismic waves composing Hawaiian volcanic tremor and gas-piston events observed by a near-source array, *J. Geophys. Res.*, **96**, 6199-6209
- Fornberg B. (1988) The pseudospectral method: accurate representation of interfaces in elastic waves calculations, *Geophysics*, **53**, 625-637
- Frankel A. & J. Vidale (1992) A three-dimensional simulation of seismic waves in the Santa Clara valley, California, from a Loma Prieta aftershock, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **82**, 2045-2074
- Fujiwara H. (1998) The fast multipole method for integral equations of seismic scattering problems, *Geophys. J. Int.*, **133**, 773-782
- Furumara T. & H. Takenaka (1996) 2.5-D modeling of elastic waves using the pseudospectral method, *Geophys. J. Int.*, **124**, 820-832
- Furumara T., B.L.N. Kennett & M. Furumara (1998) Seismic wavefield calculation for laterally heterogeneous whole earth models using the pseudo-spectral method, *Geophys. J. Int.*, **135**, 845-860
- Gaffet S. & M. Bouchon (1989) Effects of two-dimensionnal topographies using the discrete



- wavenumber-boundary integral equation method in P-SV cases, *J. Acoust. Soc. Amer.*, **85**, 2277-2283
- Geli L., P.Y. Bard & B. Jullien (1988) The effect of topography on earthquake ground motion: a review and new results, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **78**, 42-63
- Geller R.J. & N. Takeuchi (1995) A new method for computing highly accurate DSM synthetic seismograms, *Geophys. J. Int.*, **123**, 449-470
- Geller R.J. & N. Takeuchi (1998) Optimally accurate second-order time-domain finite difference scheme for the elastic equation of motion: one dimensional case, *Geophys. J. Int.*, **135**, 48-62
- George A. & J.W. Liu (1981) Computer solution of large sparse positive definite systems, Prentice-Hall, Inc.
- Gradshteyn I.S. & I.M. Ryzhik (1980) Table of integrals, series, and products, *Academic Press, inc.*
- Hastings F.D., J.B. Schneider & S.L. Broschat (1995) Application of the perfectly matched layer (PML) absorbing boundary condition to elastic wave propagation, *J. Acoust. Soc. Amer.*, **100**, 3061-3069
- Higdon R.L. (1991) Absorbing boundary conditions for elastic waves, *Geophysics*, **56**, 231-241
- Hook J.F. (1961) Separation of the vector wave equation of elasticity for certain types of inhomogeneous, isotropic media, *J. Acoust. Soc. Amer.*, **33**, 302-313
- Hook J.F. (1962a) Generalisation of a method of potentials for the vector wave equation of elasticity for inhomogeneous media, *J. Acoust. Soc. Amer.*, **34**, 354-355
- Hook J.F. (1962b) Contribution to a theory of separability of the vector wave equation of elasticity for inhomogeneous media, *J. Acoust. Soc. Amer.*, **34**, 946-953
- Hook J.F. (1962c) Green's functions for axially symmetric elastic waves in unbounded inhomogeneous media having constant velocity gradients, *J. Appl. Mech.*, **29**, 293-298
- Israil A.S.M. & P.K. Banerjee (1990) Advanced development of time-domain BEM for two-dimensional scalar wave propagation, *Int. J. Num. Meth. in Engineering*, **29**, 1003-1020
- Jo C.-H., C.S. Shin & J.H. Suh (1996) An optimal 9-point, finite-difference, frequency-

- space, 2-D scalar wave extrapolator, *Geophysics*, **61**, 529-537
- Komatitsch D. (1997) Méthodes spectrales et éléments spectraux pour l'équation de l'élastodynamique 2D et 3D en milieu hétérogène, *Thèse*, Institut de Physique du Globe, Paris
- Komatitsch D. & J. Tromp (1999) Introduction to the spectral-element method for 3-D seismic wave propagation, *Geophys. J. Int.*, **139**, 806-822
- Komatitsch D. & J.P. Vilotte (1998) The Spectral Element Method: an efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **88**, 368-392
- Komatitsch D., J.P. Vilotte, R. Vai, J.M. Castillo-Covarrubias & F.J. Sánchez-Sesma (1999) The Spectral Element method for elastic wave equations: application to 2D and 3D seismic problems, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, in press
- Kosloff D. & E. Baysal (1982) Forward modeling by a Fourier method, *Geophysics*, **47**, 1402-1412
- Kosloff D., M. Reshef & D. Loewenthal (1984) Elastic wave calculations by the Fourier method, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **74**, 875-891
- Krishnasamy G., F.J. Rizzo & T.J. Rudolphi (1991) Hypersingular Boundary Integral Equations: their occurrence, interpretation, regularization and computation, *Devel. in B.E.M.- Vol. 7* Elsevier Applied Science Publishers
- Lay T. & T.C. Wallace (1995) Modern Global Seismology, *Academic Press*
- Levander A. (1988) Fourth-order finite-difference P-SV seismograms, *Geophysics*, **53**, 1425-1436
- Lock M.H. (1963) Axially symmetric elastic waves in an unbounded inhomogeneous medium with exponentially varying properties, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **53**, 527-538
- Luo Y. & G. Scuster (1990) Parsimonious staggered grid finite-differencing of the wave equation, *Geophys. Res. Lett.*, **17**, 155-158
- Luzón F., F.J. Sánchez-Sesma, J.L. Rodríguez-Zuniga, A.M. Posadas, J.M. Garcia, J. Martin, M.D. Romacho & M. Navarro (1997) Diffraction of P, S and Rayleigh waves by three-dimensional topographies, *Geophys. J. Int.*, **129**, 571-578
- Mack M.G. (1991) A three-dimensional Boundary Element Method for elastodynamics, *Ph.D. thesis*, University of Minesota, U.S.A.



- Mansur W.J. & C.A. Brebbia (1982) Numerical implementation of the Boundary Element Method for two dimensional transient scalar wave propagation problems, *Appl. Math. Modelling*, **6**, 299-306
- Moczo P., E. Bistricky, J. Kristek, J.M. Carcione & M. Bouchon (1997) Hybrid modeling of P-SV seismic motion at inhomogeneous viscoelastic topographic structures, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **87**, 1305-1323
- Moczo P., M. Lucka, J. Kristek & M. Kristekova (1999) 3D displacement finite difference and a combined memory optimization, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **89**, 69-79
- Moczo P. (1998) Introduction to modeling seismic wave propagation by the finite-difference method, *Lecture Notes*, Disaster Prevention Research Institute, Kyoto University
- Mossessian T.K. & M. Dravinski (1989) Scattering of elastic waves by three-dimensional surface topographies, *Wave Motion*, **11**, 579-592
- Neuberg J., R. Luckett, M. Ripepe & T. Braun (1994) Highlights from a seismic broadband array on Stromboli volcano, *Geophys. Res. Lett.*, **21**, 749-752
- Ohminato T. & B.A. Chouet (1997) A free-surface boundary condition for including 3D topography in the Finite-Difference method, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **87**, 494-515
- Olsen K.B., R.J. Archuleta & J.R. Matarese (1995) Three dimensional simulation of a magnitude 7.75 earthquake on the San Andreas fault, *Science*, **270**, 1628-1632
- Ortiz-Alemán C., F.J. Sánchez-Sesma, J.L. Rodríguez-Zúñiga & F. Luzón (1998) Computing topographical 3D site effects using a fast IBEM / Conjugate Gradient approach, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **88**, 393-399
- Pedersen H.A., F.J. Sánchez-Sesma & M. Campillo (1994) Three-dimensional scattering by two-dimensional topographies, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **84**, 1169-1183
- Pedersen H.A., V. Maupin & M. Campillo (1996) Wave diffraction in multilayered media with the Indirect Boundary Element Method: application to 3-D diffraction of long-period surface waves by 2-d lithospheric structures, *Geophys. J. Int.*, **125**, 545-558
- Peirce A. & E. Siebrits (1997) Stability analysis and design of time-stepping schemes for general elastodynamics boundary element models, *Int. J. Num. Meth. in*

- Engineering*, **40**, 319-342
- Pekeris C.L. (1946) The theory of propagation of sound in a half space of variable sound velocity under conditions of formation of a shadow zone, *J. Acoust. Soc. Amer.*, **18**
- Peng C. & N. Toksöz (1995) An optimal absorbing boundary condition for elastic wave modeling, *Geophysics*, **60**, 296-301
- Pitarka A. (1999) 3D elastic Finite-Difference modeling of seismic motion using staggered grids with nonuniform spacing, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **89**, 54-68
- Pitarka A. & K. Irikura (1996) Basin structure effects on long-period strong motions in the San Fernando valley and the Los Angeles basin from the 1994 Northridge earthquake and an aftershock, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **86**, S126-S137
- Press W.H., S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling & B.P. Flannery (1992) Numerical Recipes in FORTRAN: The art of scientific computing, 2nd Ed.: Cambridge Univ. Press.
- Rice J.M. & M.H. Sadd (1984) Propagation and scattering of SH-waves in semi-infinite domains using a time-dependent Boundary Element Method, *J. Appl. Mech.*, **51**, 641-645
- Riepl J. (1997) Effets de site: évaluation expérimentale et modélisations multidimensionnelles: application au site test Euro-Seistest (Grèce), *Thèse, Université Joseph Fourier, Grenoble*
- Rodrigues D. (1993) Large scale modeling of seismic wave propagation, *Thèse, Laboratoire de mécanique, Ecole Centrale Paris*
- Rynne B.P. (1985) Stability and convergence of time marching methods in scattering problems, *IMA J. Appl. Math.*, **35**, 297-310
- Sánchez-Sesma F.J. (1983) Diffraction of elastic waves by three-dimensional surface irregularities, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **73**, 1621-1636
- Sánchez-Sesma F.J. & M. Campillo (1991) Diffraction of P, SV, and Rayleigh waves by topographic features: a boundary integral formulation, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **81**, 2234-2253
- Sánchez-Sesma F.J. & F. Luzón (1995) Seismic response of three-dimensional alluvial valleys for incident P, S, and Rayleigh waves, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **85**, 269-284



- Sánchez-Sesma F.J., A. Pech-Perez, R. Madariaga & K. Irikura (1999a) An approximate elastic Green's functions for a constant-gradient heterogeneous medium, soumis à *Geophys. J. Int.*,
- Sánchez-Sesma F.J., R. Vai & E. Dretta (1999b) The variational indirect Boundary Element Method: a strategy to deal with very large problems of site response, soumis à *ICTCA '99, 4th International Conference on Theoretical and Computational Acoustics, Trieste*
- Shakal A., M. Huang, R. Darragh, T. Cao, R. Sherburne, P. Malhotra, C. Cramer, R. Sydnor, V. Graizer, G. Maldonado, C. Peterson & J. Wampole (1994) CS-MIP Strong motion records from the Northridge, California, Earthquake of 17 January 1994, *Reports OSMS 94-07, Calif. Div. Mines Geol.*, Sacramento, California
- Song Z.-M. & P.R. Williamson (1995) Frequency-domain acoustic-wave modeling and inversion of crosshole data: Part I 2.5-D modeling method, *Geophysics*, **60**, 784-795
- Stacey R. (1988) Improved transparent boundary formulations for the elastic-wave equation, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **78**, 2089-2097
- Stekl I. (1997) Frequency domain seismic forward modeling: a tool for waveform inversion, *PhD Thesis*, Royal School of Mines, Imperial College London
- Stekl I. & R.G. Pratt (1998) Accurate viscoelastic modeling by frequency-domain finite differences using rotated operators, *Geophysics*, **63**, 1779-1794
- Takemiya H. & A. Fujiwara (1994) SH-Wave scattering and propagation analyses at irregular sites by time domain BEM, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **84**, 1443-1455
- Takeuchi N. & R.J. Geller (1999) Optimally accurate second-order time-domain finite difference scheme for computing synthetic seismograms in 2-D and 3-D media, Submitted to *Geophys. J. Int.*,
- Tanaka M., V. & J. Sladek (1994) Regularization techniques applied to Boundary Element Methods, *Appl. Mech. Rev.*, vol. 47, no 10, 457-499
- Tessmer E., D. Kosloff & A. Behle (1992) Elastic wave propagation simulation in the presence of surface topography, *Geophys. J. Int.*, **108**, 621-632
- Virieux J. (1984) SH-wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite-difference method, *Geophysics*, **49**, 1933-1957

- Virieux J. (1986) P-SV wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite-difference method, *Geophysics*, **51**, 889-901
- Wald D. J. & R. W. Graves (1998) The seismic response of the Los Angeles basin, California, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **88**, 337-356
- Yokoi T. & F.J. Sánchez-Sesma (1998) A hybrid calculation technique of the Indirect Boundary Element Method and the analytical solutions for three-dimensional problems of topography, *Geophys. J. Int.*, **133**, 121-139
- Zienkiewicz O.C. (1979) La méthode des éléments finis, trad. dirigée par J.L. Armand, *Mac Graw-Hill*



Thèse de Doctorat de l'Université  
Joseph Fourier - Grenoble I

*Titre de l'ouvrage:*

**Propagation des ondes large bande dans des milieux élastiques 3D: Méthodes d'Eléments de Frontière et couplage avec les Différences Finies.**

*Auteur:*

**François JANOD**

*Etablissement:*

**Observatoire de Grenoble  
Laboratoire de Géophysique Interne  
et Tectonophysique**

*Résumé:* Ce travail de thèse a porté sur le développement de méthodes numériques permettant de simuler la propagation des ondes sismiques "large bande" dans des milieux à géométries tridimensionnelles simples: un nombre réduit de discontinuités, surmontés d'une topographie 3D. Le champ incident modélisé doit pouvoir émaner d'une source ponctuelle proche de la surface.

Dans l'introduction générale nous précisons les objectifs de cette étude, et passons en revue les méthodes numériques utilisées en sciences de la terre.

Une méthode d'éléments de frontière reposant sur une représentation intégrale directe formulée en temps a été développée. Elle utilise un schéma de résolution explicite, qui permet de s'affranchir des limitations rencontrées en 3D par la formulation en fréquence et donne des résultats d'une précision très satisfaisante. Les limitations de la méthode viennent de la possible amplification du bruit numérique, mais surtout d'un temps de calcul important, qui limite en pratique la taille des modélisations réalisables. Les deux premiers chapitres exposent la méthode et ses résultats.

Des expressions analytiques des fonctions de Green des milieux élastiques à gradient de vitesse constant ont été proposées de façon heuristiques par Sanchez-Sesma et al. (1999). Dans le chapitre 3, nous avons testé ces fonctions pour le cas 3D, et cherché à déterminer leur applicabilité aux méthodes intégrales.

Pour échapper aux limitations sur la taille des modèles imposées par les méthodes d'éléments de frontière, tout en utilisant leur capacité à résoudre avec précision les conditions de surface libre, nous avons démarré l'étude d'une méthode hybride combinant éléments de frontière et différences finies en fréquence. Le dernier chapitre propose essentiellement une étude de l'optimisation d'un schéma de différences finies d'ordre 2, et montre les premiers résultats de sa mise en oeuvre.

*Mots Clés:* Eléments de Frontière, fonctions de Green, Différences Finies, effets de topographie, propagation d'ondes